Math
104

Dr. von Rad
Augsburg
Maximiliansplatz B 36

Albrecht von Rad

Würzburg 1818.

Elementarlehre

der

Zeit- und Raum-Größen.

Von

Dr. Friedrich Buchwald.

Erlangen,
in der Palm'schen Verlagshandlung.
1818.

STADTBIBLIOTHEK AUGSBURG

Vorrede.

Dieses Buch hat die Absicht, die Mathematik in ihrer ursprünglichen Würde als Weltgesetz in die Schulen zu bringen. Deswegen ist es in einer Art abgefaßt, welche den Lehrer selbst bei dem Unterrichte leiten kann, nicht eben, daß er die Idee gerade in die hier stehenden Fragen und Antworten zerlegen soll, sondern nur, daß ihm das Buch zu dieser Zerlegung überhaupt Anleitung gebe. Von dem Lehrer, der dieses Buch brauchen will, verlange ich aber, daß er sich so ganz in dasselbe einstudirt habe, daß er es bei dem Unterrichte selbst gar nicht vor sich zu haben brauche. Hat er es mit dem Buche so weit gebracht, so wird er die in demselben enthaltenen Ideen selbst noch weiter zu entwickeln und dem Schüler noch näher zu bringen vermögen, als in dem Buche geschehen ist. Vermag er dies nicht, so kann er überhaupt nach diesem Buche nicht lehren.

Die

Die Ansichten dieses Buchs beruhen auf: Wagners mathematischer Philosophie, Erlangen 1811. 8. und dem Buche: der Staat, Würzburg 1815. 8., welches derselbe Verfasser irgendwo für ein Exempelbuch zu dem ersten erklärt. Der Gegenstand, den ich hier zu bearbeiten hatte, zerfiel mir seiner Natur nach in vier Bücher oder Kapitel, nämlich 1) eine Dinglehre, welche das Allgemeine darstellte, das den Zeit- und Raum-Formen zum Grunde liegt; 2) Zahlenlehre oder Lehre der Zeitbilder; 3) Raumbilderlehre oder Geometrie; 4) Bewegungslehre. Diese vier Kapitel aber sollten nur so weit gehen, als in den Grammatiken die Etymologie reicht; Syntax blieb hier ausgeschlossen.

Sollten Pädagogen, welche sich für dieses Buch interessiren, mit mir darüber in Briefwechsel treten wollen, was ich sehr wünsche, so belieben sie ihre frankirten Briefe an den Verleger dieses zu senden, durch den ich sie sicher erhalten werde.

Dr. Friedrich Buchwald.

Erstes Buch.

Dinglehre.

§. 1.

Was hast du da für ein Ding? Einen Würfel. Warum nannte ich ihn wohl ein Ding? nicht wahr, weil ich seinen bestimmten Namen nicht wußte? Würfel ist sein bestimmter Name, und Ding ist der allgemeine unbestimmte Name, wenn man den bestimmten nicht weiß. Worte sind überhaupt Namen der Dinge.

§. 2.

Habe ich diesem Dinge seinen rechten Namen gegeben, wenn ich es Würfel nenne?

Gewiß. Denn jedermann nennt es so.

Auch der Römer? nennt es dieser nicht alea oder cubus, der Franzose dé oder cube? welcher nennt nun das Ding mit seinem rechten Namen? und sind nicht auch diese Namen zweierlei, je nachdem von einem Spielwürfel oder von dem sechsseitigen Körper

die Rede ist? In welcher Sprache haben die Dinge ihren rechten Namen?

§. 3.

Zeichne mir perspektivisch einen Würfel mit seinen sechs Seiten. Setze nun in jede Seite die gehörigen schwarzen Punkte, so hast du einen Spielwürfel, laß sie heraus, so ist es der geometrische Körper. Erkennst du nicht in diesem Bilde beide? Dieses Bild zeigt also dir und jedem andern den Würfel unverkennbar und verständlicher als alle Namen.

§. 4.

Was siehst du nun in diesem Bilde?

Soviel Flächen, Seitenlinien, Winkel.

Hättest du nun ein Wort, das dich diese Flächen, Linien, und Winkel zusammen anschauen machte, so wäre dieß der wahre Name des Würfels. Dieses Wort müßte aber aus den Namen der Flächen, Linien und Winkel zusammengesetzt seyn, wie das Bild des Würfels aus solchen Elementen zusammengesetzt ist, und die Worte in unsern Sprachen sind also eigentlich nicht die rechten Namen der Dinge, sondern blos auswendig gelernte Tonverbin-

dun-

dungen, bei denen man sich durch Gewohnheit an das Ding erinnert. Bilder sind besser als Worte.

§. 5.

Sieh aber zu, ob selbst das Bild vollständig sei. Wie schwer ist dieser Würfel? Du hast ihn nicht gewogen. Wie hart ist er? Du hast es nicht untersucht. Aber eine Schwere und eine Härte wird er sicher haben, und diese siehst du nicht in seinem Bilde, ja du siehst sie sogar nicht, wenn du den Würfel selbst vor Augen hast. Schwere und Härte würdest du erst erfahren, wenn du prüftest, wie stark der Würfel eine Wagschale niederdrückt, und wie sehr er dem Drucke deines Fingers oder dem Schlage des Hammers widersteht. So ist also das Bild des Würfels, das du für dein Auge zeichnest, nicht vollständig.

§. 6.

Schlage mit dem Messer an den Würfel. Gibt er nicht einen Klang? einen schlechten zwar, doch einen Klang. Eine Glocke gibt freilich einen bessern, aber es kann nicht alles eine Glocke seyn. Und wenn nun der Würfel von Salz wäre, würde er nicht einen Geschmack geben? Und wenn du ihn, so wie er jetzt ist, ans Feuer hieltest, würde er nicht einen

brenzlichten Geruch geben, wie alles angebrannte Bein oder Horn? — So gäbe also der Würfel jedem deiner fünf Sinne etwas; dem Gefühle die Härte und Schwere, der Zunge den Geschmack, der Nase den Geruch, dem Ohre den Klang, dem Auge Farbe und Gestalt, und wenn du dieß alles in Ein Bild zusammenfassen könntest, so wäre dieses Bild allein ganz vollständig; es gäbe den ganzen Würfel wieder. Solch ein Bild aber kannst du nicht zeichnen und nicht malen, nur denken; nur dein Gedanke ist dem Dinge gleich.

§. 7.

Doch aber siehst du, daß das Bild des Würfels, wie du es zeichnen oder mahlen kannst, dir noch die anschaulichste Vorstellung von dem Würfel gibt, bei welcher du ihn am besten von andern Dingen unterscheiden kannst. Denn wenn du von dem Würfel blos Härte oder Schwere wüßtest, oder auch seinen Klang, so sind ja tausend Dinge, die an Härte, Klang und Schwere dem Würfel gleich und doch keine Würfel sind. Bilder des Gesichts sind also darum die angemessensten, weil sie eine Gesammtvorstellung von der äussern Erscheinung des Dinges geben.

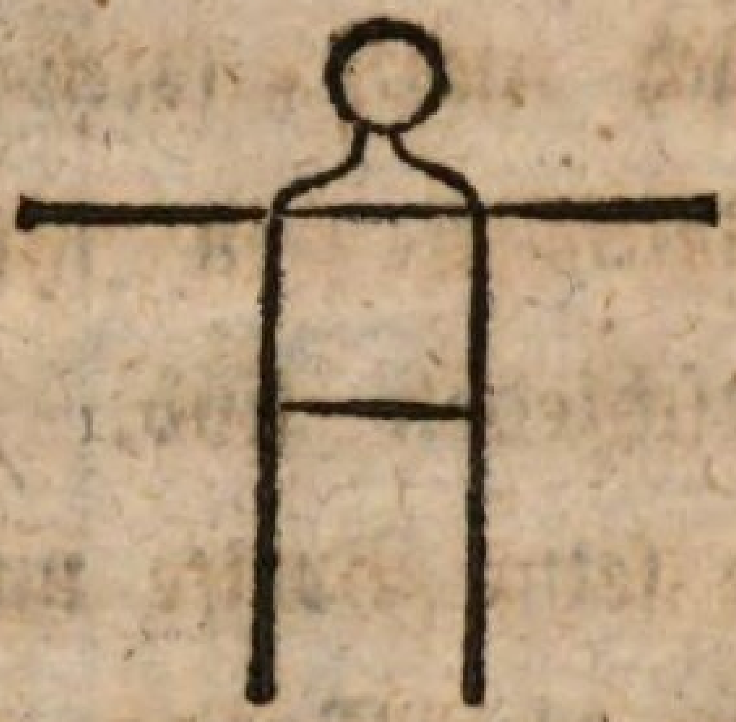
§. 8.

Nun behalte von dem Bilde des Würfels blos die Linien, die seine Seiten einschließen. In diesen siehst du, wie sich der Würfel in die Höhe und Breite legt, und wie dick er ist. Du wirst finden, daß alle sichtbaren Dinge sich nach solch einem Grundrisse zeichnen lassen, obgleich sie in ihrer Länge, Breite und Dicke sehr verschieden sind. Bei diesem Stabe überwiegt die Länge seine Breite und Dicke weit, bei dieser Scheibe ist die Breite weit überwiegend über Länge und Dicke, und bei diesem Sandkörnchen sind Länge, Breite und Dicke gleich unbedeutend. Was wäre wohl des Sandkörnchens Grundriß? — ein Punkt!

§. 9.

Jetzt siehe zu, ob du nicht die sichtbaren Dinge alle durch solche Grundrisse festhalten könntest. Da der Baum unten einen Stamm hat, so könntest du ihn ja wohl als eine stehende Linie zeichnen, von welcher oben nach rechts und links Seitenlinien ausgiengen, des Baumes Aeste und Zweige. Dieß wäre denn ein Grundriß des Baumes. Nimm nun die Gestalt eines Ochsen, so ist sein Kopf oben bei den Hörnern breit und spitzt gegen die Schnautze sich zu, so daß ihm offenbar ein Dreyeck zum Grunde liegt, der Leib des Ochsen würde dann ein

länglichtes Viereck, an welchen vorne der Kopf hienge, und wenn ich folgende Grundrisse zeichnete:



so würdest du wohl leicht darin die Gestalten des Ochsens, des Pferdes, des Vogels, des Fisches und des Menschen erkennen. Doch würdest du auch zugleich sehen, daß die Linien dieser Grundrisse in den lebendigen Gestalten von Nebenlinien umkleidet sind, wodurch sie sich einigermaassen dem Auge verstecken. Mit einiger Uebung aber wirst du bald aus den lebendigen Gestalten die Grundrisse herausfinden, und diese wieder umgekehrt mit Nebenlinien umkleiden lernen. Die Gestalten in welchen der Grundriß am naktesten erscheint, sind die Krystalle, nach diesen aber die Pflanzen; bei leztern tritt die Bekleidung des Grundrisses erst in den Blättern ein, Wurzel, Stamm und Krone des Baumes sind noch blosser Grundriß. Bekleidete Grundrisse sind lebende Gestalten.

§. 10.

§. 10.

Was nennst du **lebend**? lebt dieser Käfer, diese Rose? Der Käfer lebt, die Rose nicht.

Warum nicht?

Sie fühlt ja nichts.

Also nennst du nur das lebend, was fühlt? Aber siehe einmal, sitzt nicht die Rose auf dem Stiele?

Freilich! Der Kopf eines Nagels sitzt auch auf dem Nagel. — Ey doch! sieh doch genau zu, ob nicht die Rose aus dem Stiele erst hervorgegangen und wirklich nur eine weitere Ausbreitung des Stieles ist. Erst wird der Stiel nach oben etwas dicker, dann gibt seine rauhe Oberhaut den grünen fünflappigen Kelch der Rose, dann theilt sich seine Unterhaut (bei Bäumen der zarte Bast) in diese vielen schönen Rosenbläter, und das Innere des Stieles giebt dann vollends die Staubfäden und Griffel im Innern der Rose. Meinst du nun nicht, daß diese Rose, die sich aus ihrem Stiele so schön herausgearbeitet und **von selbst** entwickelt hat, auch lebe? mußst du nicht diese **Selbstentwicklung** Leben nennen?

§. 11.

Wie wäre es, wenn wir zwei Grade oder Stuen des Lebens setzten? eine Stufe, die blos Selbst-

ent-

entwicklung hat, und eine andre, die auch fühlt? — Letztere wäre offenbar die höhere Stufe, und von dieser gälte, was wir vorhin sagten: bekleidete Grundrisse sind lebende Gestalten. Nun wirst du aber die erste Stufe des Lebens, die blos Selbstentwicklung hat ohne Gefühl, desto mehr verbreitet, ja wirklich allgemein finden. Der Nagel, den du vorhin mit der Rose vergleichen wolltest, ist er nicht Eisen? und kennst du nicht noch mehrere Metalle? und kommen sie nicht aus der Erde? und was meinst du, daß sie in dieser anderes seyen, als was die Kelchlappen und Blumenblätter an dem Stiele der Rose sind? — So hättest du also auch in der Erde eine solche Selbstentwicklung, und also wäre auch die Erde lebend, aber freilich nur im ersten Grade.

§. 12.

Laß also nun diese beiden Stufen des Lebens gelten, und sage, daß auf die eine oder die andere Weise alles lebe, denn du mußt wissen, daß selbst die Luft, die du für ganz einartig halten wirst, verschiedene Luftarten aus sich entwickelt. Und welche Menge von Gestirnen entwickelt nicht der Aether aus sich! Nun sieh: du stehst mit fühlendem Leben in einem allgemeinen Leben voll Selbstentwicklung da, und nicht nur ist dein Leben

füh-

fühlend, es ist auch denkend, wollend. Du hättest also vierfaches Leben in dir: Selbstentwicklung — denn auch du wächsest ja — Fühlen, Denken, Wollen. Die Dinge aber, die blos die erste Stufe haben, heißen gewöhnlich todt. Sind denn aber Steine und Pflanzen auf gleiche Weise todt? Gewiß nicht. Die Pflanzen haben eigenen Wachsthum aus und in sich selbst, die Steine sind bloße Glieder von der Selbstentwicklung unsrer Erde.

§. 13.

Wenn nun alles Ding theils eigne Selbstentwicklung hat, theils von fremder Selbstentwicklung einen Theil ausmacht, so wirst du wohl finden, daß sich die einen Dinge schneller, die andern langsamer entwickeln, ein Kirschbaum z. B. ist schneller ausgewachsen als eine Eiche, ein Hund schneller als ein Mensch. Dann wirst du gleichfalls finden, daß einige Dinge viel mehr entwickeln als andre, wie z. B. eine Rose weit mehr Blätter hat als eine Tulpe, eine gefüllte Nelke mehr als eine einfache. Ich darf also wohl sagen, daß die Dinge theils in der Schnelligkeit ihres Wachsthums theils in der Fülle ihres Inhaltes verschieden sind, auch siehst du wohl ein, daß ihr Inhalt es ist, was sich in ihrem Wachsthume auseinanderlegt. So legt die Pflanze während ihres

Wachsthums ihren Inhalt an Blättern und Blüthen auseinander, und du entwickelst während deines Wachsthums äusserlich deine Glieder und innerlich deine Anlagen und Fähigkeiten. So entwickelt auch ein Volk, wenn es lange besteht, eine Menge von Künsten, Gewerben, Ständen, Aemtern u. s. w. die alle zusammen seinen Inhalt ausmachen, und anfangs ist der Inhalt überall gering. Bei einem Volke heißt nun diese Entwicklung seines Inhaltes während seines Wachsthums seine Geschichte; du hast aber auch schon Naturgeschichte kennen gelernt, und diese wäre demnach die Beschreibung der verschiedenen Dinge, welche die Natur bei ihrer Entwicklung auseinander legt. Nicht wahr?

Ich denke, die Beschreibung von Mineralien, Pflanzen, Thieren und Menschenrassen heißt Naturgeschichte.

§. 14.

Jetzt bedenke, was wir gefunden haben. Ich sage jetzt: alle Dinge legen ihren Inhalt entwikelnd auseinander, und dieß ist ihre Geschichte. Verstehst du dieß?

So wirst du denn auch einsehen, daß ein Ding in seiner Geschichte nichts entwikeln kann, als was es in sich hat, z. B. ein tauber Mensch würde kein musikalisches Talent entwikeln, als welches die höchste Vollkommenheit des Sinnes ist, der ihm fehlt.

Aber

Aber vieles kann ein Mensch enthalten, und also auch vieles in seiner Lebensgeschichte entwickeln; und was er nun so von künftiger oder vergangener Entwiklung in sich enthält, wie würdest du es ganz zusammen mit Einem Worte nennen? — Du weißst es nicht? — Dieß ist seine Natur, und weil die Welt auch so einen vielfachen schon entwikelten oder künftig zu entwikelnden Inhalt hat, so heißt sie von dieser Seite die Natur, und Naturgeschichte ist ja eben die Beschreibung von dem, was die Natur bis jetzt entwickelt hat. Verstehst du nun die Worte: Geschichte und Natur?

§. 15.

Folge mir jetzt weiter. Nimm die Pflanze. Jetzt hat sie Blumen. Sind diese gleich am Anfang da gewesen? — Bald wird sie Saamen tragen; hast du diesen auf den ersten Blättern schon gefunden? — Sind nicht Blumen und Früchte das Letzte bei der Pflanze? — Die Geschichte eines Dings fängt also mit seinem Ersten an, und endet mit seinem Letzten, alle Geschichte hat Anfang und Ende. Die Pflanze fängt mit dem Saamen an und endet mit der Frucht, Saame ist also Anfang, Frucht ist Ende, und zwischen diesem Anfange und Ende lebt die Pflanze als ein Mittleres. Ich sage also: die Pflanze hat Anfang, Mittel, Ende. Wenn du einen Stein in die Höhe wirfst, steigt er nicht anfangs empor, schwebt

einen Augenblick mitten zwischen Steigen und Fallen, und fällt endlich? Alle Dinge haben Anfang, Mittel, Ende.

§. 16.

Kennst du nicht ein eignes Wort für diesen Durchgang der Dinge durch Anfang, Mittel, Ende? — Es heißt Zeit. Weil sie nun aber bei diesem Durchgange auch ihren Inhalt auseinander legen, also ihre Geschichte machen, so sagt man: alle Geschichte sei in der Zeit. Jetzt aber frage ich dich weiter. Ist der heutige Tag nicht gerade in der Mitte zwischen dem gestrigen und dem morgenden Tage? Der morgende Tag aber ist noch künftig, der gestrige ist schon vergangen, nur der heutige ist gegenwärtig. Ich darf dir also jetzt wohl die dreimal drei Worte der Zeit:

Anfang, Mittel, Ende
Gestern, Heute, Morgen
Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft

untereinander an die Tafel schreiben, und du wirst sie alle verstehen.

§. 17.

Vorhin sagten wir einmal, der Inhalt, den ein Ding in seiner Geschichte entwikelt, sei seine Natur, die Entwicklung aber geschehe in der Zeit. Nun

sieh

sich aber noch etwas Neues. Indeß diese Pflanze anfängt, mittelt, endet, indeß sie also gestern, heute, morgen, also in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft lebt, steht ihre Wurzel unten im Boden, ihre Blume oben auf des Stengels Spitze, ihre Blätter in der Mitte, und breiten sich nach rechts und links aus. Die Mitte ist hier also doppelt, und heißt rechts und links, vorhin bei der Zeit war sie nur einfach und hieß heute oder Gegenwart. Du siehst wohl, es ist hier so etwas Aehnliches, wie in den dreimal drei Worten der Zeit, aber es sind nicht drei Worte sondern viere, nämlich:

oben

links rechts

unten.

Nun hast du wohl gesehen, daß ein Ding durch die drei Worte der Zeit durchgeht, in diesen Worten aber siehst du es feststehn, und du siehst des Dinges ganze Natur hier auf einmal vor Augen, indeß sie in der Zeit nur nach und nach sich entwickelt. Wie nennst du nun dieß, daß ein Ding seine Natur auf einmal auseinandergelegt darstellt? Nenn' es Raum. So sage ich, daß im Raum alles zugleich oder auf einmal und neben einander bestehe, in der Zeit aber alles auseinander und nach einander entstehe. Also die Art des Entstehens hiesse Zeit, die Art des Bestehens Raum.

§. 18.

§. 18.

Nimm deinen Würfel wieder zur Hand, und sieh zu, ob du nicht an ihm die Worte des Raumes eben so vollständig findest, als wir vorhin an allen veränderlichen Dingen die Worte der Zeit gefunden haben. Wie viel hat der Würfel Seiten? — Sechse. — Dieß wären also zwei mehr als wir dachten; denn oben, unten, rechts und links geben nur vier Seiten. Was haben wir also vergessen? Vorne und hinten. — Richtig. Nun ziehe einmal Linien, wie ich verlange. Eine nach oben und unten, diese soll heissen Länge; eine zweite nach rechts und links, diese soll heißen Breite, und eine neue Linie nach hinten und vorne, diese soll heißen Dicke. — Ist nun nicht alles dieß in dem Würfel zusammen? — Diese Richtungen heißen Ausmessungen (Dimensionen) des Raumes, und jede ist, wie du siehst, doppelt, und hat zwei Endpunkte. Die Worte des Raumes wären also die doppelte drei; wenn du aber genau zusiehst, so wirst du finden, daß der Würfel ausser diesen Ausmessungen auch noch ein Inneres und Aeusseres, eine Tiefe, hat. Also

oben } = Länge
unten }

rechts } = Breite
links }

vorne

vorne } = Dicke
hinten }

inne } = Tiefe
aussen }

sind die vollständigen Worte des Raumes, und ihrer sind zweimal viere.

Anmerkung. Für den Gemeinbegriff von inne und aussen hat unsere Sprache kein Wort, und ich sah mich genöthigt, das Wort Tiefe aus seinen andern Bedeutungen hieher zu versetzen, wo es wohl eigentlich einheimisch seyn möchte. Unverkennbar gehört wohl dieser Gegensatz der Innerlichkeit und Aeußerlichkeit, dessen Hypotenuse hier das Wort Tiefe bezeichnet, zu den Kategorien des Raums.

§. 19.

Nun verstehst du auch Zeitfolge und räumliche Ausdehnung. Aber sieh einmal zu, wie du eine Zeitfolge z. B. mehrere Glokenschläge, in Gedanken festhalten kannst. Wie unterscheidest du die Stunden des Tags in deinen Gedanken? Nicht wahr, indem du sie zählst? Was thust du aber, wenn du zählst? Benennst du nicht jede Stunde mit Namen? Eins, zwei, drei u. s. w. Durch diese Namen also unterscheidest du die Stunden bestimmt, und doch sind diese Namen von der Art, daß du sie auch andern gezählten Dingen, und

zwar

zwar in derselben Ordnung, giebst; diese Zahlnamen, die du auch als Ziffern schreiben kannst, sind also keinem Ding eigen, sondern blos zum Zählen bestimmt, und haben deswegen ihre feste Ordnung, in welcher sie vom Anfange des Zählens sich entfernen. Fünfe liegt weiter vom Anfange als drei.

§. 20.

Wenn du dir nun durch Zählen des Inhaltes einer Zeitfolge bewußt wirst, wie wirst du dir aber des Inhaltes einer Raumausdehnung bewußt? wie groß bin ich? — Du hast es nicht gemessen. Also durch Messen würdest du wissen, wie groß ich bin, und deßwegen müßtest du ein Maaß, z. B. eine Elle, öfters an mich anlegen, um zu sehen, wie oft dieses Maaß in einer Größe enthalten wäre, vielleicht zwei und ein halbes Mahl. In der Höhe eines Berges würde aber dieses Maaß noch viel öfter enthalten seyn. Hattest du aber nicht für die Zeitfolge auch ein solches Maaß? Du zähltest ja Stunden und fandest, daß Tag und Nacht zusammen deren 24 enthalten. Zählen und Messen also setzen beide etwas Bestimmtes, ein Maaß, voraus, was du für die Zeit in einer kurzen oder langen Dauer, für den Raum in irgend einer sichtbaren Ausdehnung nehmen kannst.

kannst. Die kleinste Dauer für uns wäre wohl ein Augenblick, die kleinste Ausdehnung ein fast unsichtbarer Punkt. Was du nicht mehr zählen und messen kannst, woran du also kein Ende findest, nennst du unendlich.

§. 21.

Nun bemerke noch dieses, daß dir das Maaß fehlt, wenn die Dinge recht klein sind, wie ein Punkt oder ein Augenblick, und eben so, wenn sie recht groß sind. Eine Zeit, die nie aufhört, wie lange daurt diese? Ewig. Ein Weg durch die Himmelsräume, wie lang ist dieser? Unendlich. So kannst du also nur die Dinge von mittlerer Dauer und Ausdehnung messen, die größten und kleinsten kannst du weder zählen noch messen, die kleinsten nicht, weil du sie nicht weiter zu theilen vermagst, die größten nicht, weil du nicht fertig wirst, sie aus Maaßen zusammenzusetzen.

Zweites Buch.

Zahlenlehre.

1\. 2. 3. 4. 5. 6 7. 8. 9.
Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.

In der ersten Zeile hast du die Ziffern oder Zahlzeichen, in der zweiten ihre Namen. Beide kennst du. Statt der Ziffern könntest du auch wohl Punkte oder Striche setzen, für die Eins einen, für die Zwei zwei u. s. f. Dieß wäre anschaulicher. Laß aber jetzt die Ziffern gelten, die überall angenommen sind; sie heissen die arabischen, und sind bequem zu schreiben.

§. 23.

Wie fängst du an zu zählen?

Mit der Eins, dann folgt die Zwei, die Drei u. s. f.

Laß einmal doch sehen, was die Eins sey, und ob die Zwei wirklich auf sie folge.

Wie kann ich dieß wissen? Ich dachte gar nicht, daß man so fragen könnte.

Nimm

Nimm dieses Buch. Ist es nicht Eins? Nun schlag es auf. Was liegt jetzt vor dir? nicht wahr, zwei Blätter, das eine rechts, das andere links? Nimm dieses Blatt aus dem Buche. Ist es nicht auch Eins und hat zwei Seiten? Auf beiden Seiten kannst du lesen. Siehst du nun nicht, wie hier überall die Eins ist, und die Zwei auf sie folgt? Wenn sich die Eins theilt, wird sie Zwei.

§. 24.

So wäre also überall die Eins das noch ungetheilte oder als ungetheilt betrachtete Ganze, und die Zwei wären ihre ersten Theile. Dein Arm hat, wie dein Fuß, in der obern Hälfte nur Einen Knochen, in der untern Hälfte aber zwei, weil er anfangs ganz ist, und dann sich theilt. In der Handwurzel und den Fingern geht die Theilung noch weiter in kleinere Knochen, davon der Daumen zwei hat, die andern Finger aber drei, und in fünf Finger theilt sich die ganze Hand. Du siehst daraus schon, daß die übrigen Zahlen alle durch weitere Theilung aus der Eins entstehen, wie auch dein Rückgrad Eine Säule ausmacht, die in eine große Anzahl von Wirbelbeinen getheilt ist.

Nun habe ich aber hier zwei Nüsse. Sind diese vorher auch Eins gewesen, und dann zwei geworden? Wenn sie von Einem Baume sind, so waren alle

Nüsse, die er getragen hat, nur Theile, die sich aus ihm entwickelt und nach der Reife von ihm losgemacht haben; waren aber diese beiden Nüsse nicht von Einem Baume, so war doch jede derselben ein Theil ihres Baumes, und du siehst auch hier, daß alles Einzelne und Viele nur aus der Theilung einer Einheit und Ganzheit kommt. Der Würfel, den du vorhin hattest, ist bestimmt ein Theil von irgend einem Stücke Elfenbein, das der Drechsler in beliebig viele Theile spaltete.

Anmerkung. Der Lehrer werde hier nicht müde mit Beispielen, welche zeigen, daß die Zahlen aus der Eins entstehen. Die Art, wie man die Zahlen durch Striche oder Punkte zur Anschauung bringt, z. B. | || ||| |||| oder . : ∴ :: u. s. w. ist nicht die richtige, weil sie willkührliche Linien oder Punkte setzt. Will man die Entstehung der Zahlen durch Linien oder Punkte anschaulich machen, so muß man es an Einer Linie thun, die sich selbst lebendig abtheilt. Dergleichen Linie ist die schwingende Saite, die bekanntlich ihre erste Totalschwingung nachklingend immer weiter in Hälften, Viertel, Sechstel, Achtel u. s. w. dividirt, wo also aus der großen Linie kleinere von selbst entstehen. Die Schwingungsknoten zwischen diesen Theillinien sind von selbst Punkte.

§. 25.

§. 25.

Nun gieb weiter Achtung. Diese Nuß, die auf ihrem Baume sitzend noch ein Theil von ihm war, ist jetzt selbst Eins und Ganzes, Eine Nuß. Du siehst aber, daß sie zwei halbe Schaalen hat, die mit ihren Rändern zusammengewachsen sind. Sie ist also gleichfalls Eins und hat Zwei in sich. Nimm einen Baum. Der Stamm, der Eins ist, theilt sich zunächst in zwei große Aeste; jeder Ast ist Eins, und theilt sich wieder in eine Gabel von zwei Zweigen, und so geht es fort. So hast du also in jeder Eins wieder einer Theilung, und in jeder Theilung wieder Eins. Nun unterscheide künftig die Einheit, die über einer Theilung steht, oder der Theilung vorangeht, z. B. den Stamm, aus dem die Aeste kommen, durch das Wort Einheit, und nenne die Einheit, die aus der Theilung entstanden neben einer andern Einheit steht, z. B. einen Ast am Stamme, Einzelnheit. Vergiß aber nicht, daß dasselbe Ding in einer Hinsicht Einheit in der andern Einzelnheit seyn kann; so ist ein Baumstamm unter mehrern ein Einzelner, für die aus ihm entspringenden Aeste aber ist er Einheit. In Ziffern macht dieß aber keinen Unterschied; die Einheit und Einzelnheit haben

haben dieselbe Ziffer, obgleich die Einheit ihr eignes Zeichen haben sollte, das über alle Ziffern erhaben wäre.

§. 26.

Wenn nun die Zwei überall aus einer Theilung der Eins entsteht, und diese Theilung sich auf drei, vier, fünf und mehrere Theile fortsetzen läßt, so kannst du auch wirklich alle nach der Eins folgende Zahlen als Theile von ihr, das heißt, als Brüche ansehn, und dann würden sie in Ziffern so geschrieben werden:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9}$$

das heißt, die Einheit in zwei, drei, vier u. s. w. Theile getrennt. Denkst du aber nicht daran, daß alle diese Zahlen aus der Einheit entstanden sind, so erscheinen sie dir als ganze Zahlen, wie dir auch eine Nuß vom Baume getrennt nicht mehr als Theil des Baumes sondern als Ganzes für sich erscheint. Du kannst also alle Zahlen entweder als Brüche oder als Ganze betrachten.

§. 27.

Also die Eins ist überall das noch ungetheilte Ganze, und darum fängst du mit der Eins zu zählen,

len, das heißt, zu theilen an; Zwei aber ist die erste Theilung. Jetzt sieh aber näher zu, ob nicht, wie bei deinen zwei Füßen, das eine Glied jeder sichtbaren Theilung rechts, das andre links sei. Weiter. Der Tag hat zwei Hälften, die eine heißt Tag, die andere Nacht, dein Leib hat zwei Seiten, eine rechte und eine linke, dein Haus hat zwei Stockwerke, ein oberes und ein unteres, dein Lineal hat zwei Richtungen, eine in die Länge, die andre in die Breite, das Wetter ist kalt oder warm, die Luft ist heiter oder trübe, die Menschen sind groß oder klein; was ist dieß alles? sind es nicht überall zwei Dinge? und sind nicht diese zwei Dinge immer das Umgekehrte oder Entgegengesetzte von einander? ist nicht das Kalte dem Warmen, das Große dem Kleinen, das Heitre dem Trüben, das Linke dem Rechten entgegengesetzt? Merke dir also: wenn aus der Eins die Zwei entsteht, so entsteht immer Entgegengesetztes und Zwei ist die Zahl des Gegensatzes. Jeder Gegensatz verlangt zwei Glieder.

§. 28.

Wenn ein Gegensatz nothwendig zwei Glieder haben muß, weil das eine das umgekehrte von dem

andern seyn soll, so ist dieß wiederum auf zweifache Art möglich, nämlich zeitlich und räumlich. Voriges Jahr warst du krank, jetzt bist du gesund, und diese zwei Zustände von dir sind sich entgegengesetzt; du bist gesund, dein Bruder ist krank, und ihr beide seyd also entgegengesetzt. Im ersten Falle zeigte sich der Gegensatz an Einem Gegenstande aber in verschiedener Zeit; im zweiten Falle zeigte sich der Gegensatz an verschiedenen Gegenständen zu derselben Zeit. Du kannst es so an die Tafel schreiben:

Einheit	Verschiedenheit
1) der Person	der Zeit
2) der Zeit	der Person

welches die vorhin gegebenen zwei Fälle sind. Auf diese Art geschrieben zeigen sich die Gegensätze sichtbar, indem ihre Glieder oben und unten, rechts und links zu stehen kommen.

Anmerkung. Hier muß der Lehrer das schematische Niederschreiben von Gegensätzen einüben lassen.

§. 29.

Warm und kalt, reich und arm, groß und klein, gesund und krank sind Gegensätze. Von welchem Gliede

Gliede dieser Gegensätze willst du aber anfangen? Soll ich gesund oder krank zuerst nennen, groß oder klein?

Ich würde immer das Warme, das Reiche, das Große, das Gesunde vor ihrem Gegentheile nennen, denn diese Gegentheile heben auf, was in diesen ersten Glieder gesetzt ist. In Kälte, Krankheit stirbt das Leben ab, was gar zu klein wird, hört endlich auf zu seyn, und arm seyn fördert ebenfalls das Leben nicht.

Gut! So ist also in jedem Gegensatze ein setzendes (positives) und ein aufhebendes (negatives) Glied, und du fängst richtig mit dem setzenden Gliede an. Weißst du aber auch immer, welches das setzende Glied sey? Laß sehen. Rechts und links; welches ist hier das setzende Glied? Rechts, weil deine rechte Hand die geübtere ist, aber wenn einer sich links eingeübt hätte? dann würde man den Bau des menschlichen Körpers fragen müssen, ob nicht etwa die rechte Seite Vorzüge hätte vor der linken. Aber noch eins. Wer von Osnabrück nach Münster will, macht setzende Schritte, wenn er Münster näher kommt, aufhebende aber, wenn er Osnabrück sich nähert; wer aber von Münster nach Osnabrück will,

für den werden gerade die Schritte, die für jenen aufhebende oder Rückschritte sind, setzende oder Fortschritte seyn. Wer hat nun recht? Ich denke beide. Man muß nach den jedesmaligen Umständen beurtheilen, welches von den beiden Gliedern eines Gegensatzes als das setzende oder aufhebende anzusehen sey.

Für alle Glieder, die man als setzend ansieht, pflegt man ein Kreuz + als Zeichen zu setzen, für die aufhebenden aber einen Queerstrich —, und man verbindet diese Zeichen auch mit Zahlen, z. B. + 20 — 5, das heißt, 20 Dinge, welche gesetzt, und 5 Dinge, welche davon aufgehoben worden. Bedeuten diese Zahlen Geld, so deutet das setzende Zeichen auf Einnahme oder wirklichen Besitz, das aufhebende Zeichen auf Ausgaben oder Schulden. Das setzende Zeichen kann bei den Zahlen oft weggelassen werden, weil es sich von selbst versteht, daß vor der Aufhebung etwas gesetzt worden. Obige Ziffern werden also dann: 20 — 5 geschrieben.

§. 30.

Jetzt verstehst du also die Eins, welche das noch ungetheilte Ding ist, und die Zwei, welche der Gegen-

gensatz ist, in den alle Dinge übergehen, wenn sie sich entwickeln und theilen. Hast du nun die Eins mit dem Gegensatze, z. B. das Vermögen mit Einnahmen und Ausgaben, das Leben mit Gesundheit und Krankheit, die Farbe mit Hell und Dunkel, den Ton mit Höhe und Tiefe, so hast du offenbar drei. Da nun eben an jeder Eins die Zwei dann erscheinen, wenn sie in die Entwicklung eingeht, alle Entwicklung aber in der Zeit geschieht, so ist die Drei, oder die Erscheinung der Zwei an der Eins eigentlich die Zeitzahl, und du wirst dich hiebei an die drei Worte der Zeit erinnern. Das mittlere dieser drei Worte ist eine Einheit, von welcher das erste und das letzte als Entgegengesetzte ausgehen. In der Gegenwart liegt eine Vergangenheit (denn morgen ist der heutige Tag vergangen) und eine Zukunft (denn gestern war der heutige Tag zukünftig), die du als besondere Formen der Zeit herausheben kannst. Gegenwart ist eigentlich die reine Einheit der Zeit, die, wenn sie nie zur Vergangenheit und Zukunft würde, Ewigkeit heissen müßte.

§. 31.

Vergleiche jetzt die Zwei mit der Drei. Die Zwei ist ein vollständiger Gegensatz mit zwei zusammen-

mengehörenden Gliedern, ein Paar. Die Drei ist eine Einheit und ein Gegensatz, bei welchem die Einheit selbst noch einsam und ungepaart dasteht, z. B.

Gegenwart

Vergangenheit Zukunft

wo Vergangenheit und Zukunft sich paaren, Gegenwart aber allein steht. Eine solche Zahl, die ein unpaarigtes, einsam stehendes, Glied hat, dem noch kein andres gegenübersteht, heißt eine ungerade Zahl; in geraden Zahlen ist kein Glied einsam, weil sie aus vollständigen Gegensätzen bestehen.

§. 32.

Alle Zahlen sind gerade oder ungerade, und die geraden Zahlen stammen alle von der Zwei, dem ersten Paare, ab, und lassen sich gänzlich auf diese zurückführen, z. B. zwölf Handschuhe sind sechs Paare. Dagegen lassen sich die ungeraden Zahlen auf die Zwei und Eins, also auf die Drei, zurückführen, z. B. neun Handschuhe sind vier Paare und Einer.

§. 33.

Willst du nicht einen Versuch machen, ungerade Zahlen gerade zu machen? Fange mit der Drei an.

Ich

Ich setze noch Eins hinzu, so habe ich viere, eine gerade Zahl, oder ich nehme die Eins hinweg, so habe ich die Zwei, auch eine gerade Zahl.

Du wirst sehr leicht fertig mit deiner Aufgabe, und ein gewöhnlicher Arithmetiker möchte dich noch dazu loben, daß du so schnell addiren und subtrahiren gelernt hast. Ich aber kann gar nicht damit zufrieden seyn, daß du der Drei ihre Eins nehmen willst, nur damit sie eine gerade Zahl werde; denn einmal kommen wir dadurch zurück und nicht vorwärts, und dann hast du der Drei, wenn du ihr ihre Eins nimmst, gerade den Kopf abgeschlagen, was grausam ist. Denn wenn du der Zukunft und der Vergangenheit die Gegenwart nimmst, so wirst du von jenen beiden nicht viel erleben. Verfahre also lieber umgekehrt, und gieb der Drei noch etwas zu, daß sie Viere wird, aber gieb ihr etwas, nicht wie es dir gerade einfällt, sondern was ihr gehört, und was sie brauchen kann.

Das verstehe ich nicht. Ich denke, aus der Drei wird immerhin Viere, wenn ich Eins zugebe, sei es auch, was es wolle.

Meinst

Meinst du? Aber denke doch, daß wir gesagt haben, die Zwei entstehe aus der Entwicklung der Eins, und aus der Zwei entstehen dann alle übrige Zahlen. Willst du uns die Zahlen nicht sinnlos vorbrökeln, wie wan den Hühnern die Brodkrumen bröselt, so wirst du dich schon bequemen müssen zu sagen, wie die Eins, nachdem sie zur Zwei geworden, und nun auch Drei ist, zulezt Viere werde. Du hast gesehen, daß in der Drei die Einheit ungepaart oben stand; unter ihr stand (§. 31) das Paar ihres Gegensatzes, so muß also das Glied, das noch fehlt, um die Drei zur Viere zu machen, so beschaffen seyn, daß es mit der noch unpaarigten Eins ein Paar gibt, ihr gegenüber steht. Soll es ihr aber gegenüberstehen, so muß es auch eine Einheit seyn aber eine entgegengesetzte, Vergangenheit und Zukunft müssen also in ihr auch enthalten seyn, wie in der ersten Einheit, welche Gegenwart hieß. Wie aber beide aus der ersten Einheit hervorgiengen, so müssen sie in dieser enden, und du wirst also als das vierte Glied für jene Zeitformen nichts anders als die Ewigkeit setzen können. Daraus entstehen dir nun die Zeitworte nicht mehr als drei, sondern als viere nämlich:

heute

heute | Gegenwart
gestern morgen | Vergangenheit Zukunft
immer | Ewigkeit

Wie mache ich aber die drei Worte: Anfang, Mittel, Ende zu vieren? was kann nach dem Ende noch hinzukommen?

Du fragst scharfsinnig. Hier enthält die Mitte einen Gegensatz, der nicht ausgesprochen ist. Wenn du diesen ganz aussprichst, so wird die Viere vollständig. Ich will dir es gleich an die Tafel schreiben:

Anfang
Zunahme Abnahme
Ende

und so hast du ein Beispiel von einer ganz besonderen Drei, die durch die Spaltung ihres einen Gliedes zur Viere wird. Auch hier siehst du aber, wie in der Viere zwischen die erste und letzte Einheit der Gegensatz tritt.

§. 34.

Hier hast du also die Viere, und zwar, wie du siehst, wirklich als zweimal zwei, oder zwei Paare, die zusammengehören, zwei in einander verflochtene

Gegensätze. Du siehst, daß das, was oben und unten steht, die Einheit oder das Ganze ist, was rechts und links steht, sind Uebergänge. Was oben steht, ist das Ganze, ehe es sich getheilt hat, die wahre Einheit, der Anfang; was unten steht, ist die Einheit nach ihrer Theilung, das wiederhergestellte Ganze. Was rechts und links steht, ist der mittlere Gegensatz, der von dem obern zu dem untern Gliede oder umgekehrt den Uebergang macht, und du kannst die Viere überhaupt bezeichnen, als die Verwebung eines ursprünglichen und eines mittlern Gegensatzes. Dadurch hat denn die einsame Einheit in der Drei ihr entsprechendes Glied gefunden, und die Viere ist die Zahl, in welcher die ungerade Drei ihre Vervollständigung findet. Beispiele werden dir diese Ansicht geläufig machen. Schreibe:

Nord		Mittag		Oben		Gott	
West	Ost	Abend	Morgen	Links	Rechts	Natur	Geist
Süd		Mitternacht		Unten		Welt	

überall wirst du finden, daß die zwei Mittelglieder blos den Uebergang zwischen den zwei äussersten machen, denn auch im letzten Beispiele offenbaret sich Gott durch Natur und Geist als Welt.

§. 35.

§. 35.

Betrachte jetzt die Viere noch näher. Sie enthält zwei Paare, nicht wahr? Ihr Inhalt sind also Paare, und dieser Paare sind zwei, also ein Paar Paare. Was ist in der Viere? die Zwei. Wie ist sie in ihr? zweimal. Die Zahl Zwei ist also hier der Inhalt, und zugleich auch die Art und Weise, wie der Inhalt gesetzt worden ist; die Zahl Zwei ist also hier Inhaltszahl und Formzahl zugleich. Dieselbe Zahl Zwei erscheint also in der Viere auf entgegengesetzte Weise, nämlich als Inhalt und als Form oder Art und Weise des Setzens. Eine solche Zahl, in welcher, wie in der Viere, Inhalt und Form einerlei Zahl sind, heißt eine Stufenzahl oder Potenz, z. B. dreimal drei, viermal vier, fünfmal fünf u. s. w. Merke dir dieß.

§. 26.

Warum beissen denn diese Zahlen Stufenzahlen? und was sind denn die andern Zahlen?

Wenn du dich anstrengen willst, so will ich deine Frage beantworten. Wie hast du Lesen gelernt? Lerntest du nicht zuerst Laute, dann Worte? Was waren aber die Worte? waren sie nicht ein Gesammt-

laut, in welchem mehrere einzelne Laute enthalten waren? war also nicht der Inhalt des Wortes im Worte zu einem gemeinsamen Laute verbunden? und dieser Inhalt war Laut wie das Wort auch? War also nicht das Wort ein Laut von Lauten, wie die Zahl Viere ein Paar von Paaren? und hattest du nicht als du von den Lauten zu den Worten kamst, eine neue Stufe erreicht? Und von dem Aussprechen der Worte kamst du zu Sätzen, die du lasest, und in welchen du Worte aussprachst, wie vorhin in den Worten Laute, und war ein Satz denn etwas anderes, als ein großes abgetheiltes Wort, das mehrere kleinere Worte enthielt, also ein Wort von Worten, und damit eine neue Stufe? und wenn du nun ganze Sätze zu Einem Ganzen verbindend eine Rede machen kannst, so ist diese Rede wiederum ein Satz von Sätzen, und eine neue Stufe für den Schüler, der hier nicht nur Lesen, sondern Deklamiren lernt, nicht wahr? — Nun gieb Acht, ob nicht bei allen diesen Stufen, wie bei der Zahl Viere, Inhalt und Form Eins war, so daß also das Wesen einer Stufe darin besteht? Ich will dir jetzt an die Tafel schreiben:

Ein Paar von Paaren ist . . . Viere
Ein Laut von Lauten ist . . . Wort

Ein

Ein Wort von Worten ist . . . Satz

Ein Satz von Sätzen ist . . . Rede

Nun siehst du wohl ein, warum diese Zahlen, in welchen die Inhaltszahl und die Formzahl einerlei sind, Stufenzahlen heissen. In jeder Stufe nämlich wird derselbe Begriff zum Inhalte und zur Form oder Art und Weise des Setzens; z. B. nachdenken (reflektiren) heißt: gedachtes denken, und ist eine höhere Stufe als das einfache Denken.

§. 37.

Willst du nun wissen, was die andern Zahlen sind, die nicht Stufenzahlen heissen, z. B. 5. 6. 7. 10. u. s. w. so entstehen sie entweder aus irgend einer Stufenzahl mit dem Ueberschusse von Eins, z. B. Viere und Eins, oder sie entstehen aus zwei ungleichen Zahlen, wovon die eine den Inhalt, die andere die Form giebt. So z. B. nimmst du die Drei zum Inhalte, und setzest sie gepaart, d. h. zweimal, daß also zwei die Form sei, so erhältst du sechse, und fügst du noch eine überschüssige ungepaarte Eins hinzu, so hast du sieben. Die Zahlen, die nicht Stufenzahlen sind, entstehen also aus diesen mit einem Ueberschusse, oder aus der Verbindung ungleicher Zahleln mit und ohne Ueberschuß.

§. 38.

Jetzt merke Namen. Die Verbindung zweier Zahlen zu einer einzigen, so daß die eine Zahl dabei den Inhalt die andre aber die Form gebe, heißt Multiplikation, die aus solcher Verbindung hervorgegangene neue Zahl heißt Produkt, die zwei Zahlen, aus welchen das Produkt hervorgegangen, heissen Faktoren des Produkts, und zwar heißt der erste Faktor, die Inhaltszahl, Multiplikandus, der zweite Faktor, die Formzahl, Multiplikator. Nun begreifst du leicht, daß die Stufenzahlen (Potenzen) Selbstmultiplikationen einer Zahl sind, und daß bei aller Multiplikation die Faktoren nicht blos neben einander gestellt werden dürfen, wie viere und dreie, welche zusammengestellt sieben machen, sondern in einer Multiplikation muß die Inhaltszahl so oft gesetzt werden, als die Formzahl angiebt.

§. 39.

In jedem Produkte hängen also die Faktoren gegenseitig von einander ab, es konnte nur dieser Inhalt gesetzt werden, und dieser mußte so oft gesetzt werden, daß also die Inhaltszahl im Gesetztwerden von der Formzahl abhängt, was aber diese setzen soll, hängt von der Inhaltszahl ab. Dieses innere Verhältniß der Faktoren eines Produkts, wobei einer

sich nach dem andern bequemt, macht das Wesen der Multiplikation aus, und es bleibt dabei zufällig oder willkührlich, welchen von beiden Faktoren eines Produkts du zur Inhaltszahl und zur Formezahl annehmen willst. In dem Produkte: Sechse, kann die Zwei dreimal oder auch die Drei zweimal gesetzt heissen. — In unserer deutschen Sprache ist die Formzahl immer durch das angehängte Wörtchen mal bezeichnet.

§. 40.

Siehst du nun ein, wie zwei Faktoren sich durch Multiplikation zu einem gemeinschaftlichen Produkte verschmelzen, so versuche auch umgekehrt, aus einem Produkte seine Faktoren wieder herzustellen. Setze zu diesem Zwecke zuförderst ein ächtes und vollkommenes Produkt, welches, wie die Zahl viere, aus einer mit sich selbst multiplicirten Zahl entstanden ist, z. B. sechszehn, so wirst du die Zahl, aus der es entstanden ist, das heißt, seine Wurzel, errathen, wenn du mehrere Zahlen erst mit sich selbst multiplicirst und zusiehst, ob ihre Potenz dem gegebenen Produkte nahe oder gleichkomme. War sechszehn gegeben, so kommt die Selbstmultiplikation von Drei ihm nahe, die von Fünf übersteigt es, die von Vier kommt ihm gleich, Viere ist also die Wurzel von Sechszehn. Hast du Produkte, die aus keiner Selbst-

multi-

multiplikation einer Zahl entstanden sind, so haben diese gewiß zwei verschiedene Faktoren, und wenn dir noch keiner bekannt wäre, so müßtest du mit irgend einer Zahl es versuchen, ob sie mit irgend einer andern multiplicirt dem gegebenen Produkte gleichkäme. Wäre dieß, so hättest du die beiden Faktoren des Produktes gefunden. Z. B. der gegebene Produkt sey 24, so versuche einmal, ob nicht die Zahl 6 mit irgend einer Formzahl multiplicirt, die 24 erreicht. Du wirst finden, daß die 4 mit der 6 dieß leistet, und so hast du 4 und 6 als die zwei Faktoren der 24. Ist dir aber zu dem Produkte auch einer der Faktoren gegeben, so versuchst du an ihm als Inhaltszahl verschiedene Formzahlen, bis du eine findest, die mit ihm jenes Produkt gibt. Dabei wird es dir Dienste thun, wenn du die Tafel von Faktoren und Produkten, die man das Einmal Eins nennt, im Gedächtnisse hast. Nun merke noch Namen. Dieses Zurückgehen von einem Produkte auf seine Faktoren nennt man Division, und ist das Produkt ein vollkommenes aus einem einzigen Faktor, so heißt die Division ein Wurzelausziehen. Bei unvollkommenen Produkten aus ungleichen Faktoren aber, wo man mit einer gegebenen oder auf Gerathewohl genommenen Inhaltszahl anfangen muß, wie vorhin bei der 24, nennt man diese Inhaltszahl, mit der man

an-

anfängt, den Divisor, die gefundene Formzahl den Quotienten, das Produkt selbst den Dividendus, und das ganze Verfahren wird betrachtet als eine Theilung des Dividendus unter die Einheiten des Divisors, wo sodann der Quotient aussagt, wie viel von dem Dividend auf jede Einheit des Divisors komme. Z. B. 24 Nüsse unter 6 Personen vertheilt kommen auf jede Person 4 Nüsse. So erscheint die ganze Divisionsrechnung als eine Theilungsaufgabe, da sie an sich eine Zurückführung der Produkte auf ihre Faktoren, also die umgekehrte Multiplikation ist.

Anmerkung. Wer die gemeine Ansicht der Division als einer Theilungsaufgabe, welche mit dem Divisor aus dem Dividend einen Quotienten sucht, wissenschaftlich rechtfertigen will, der wird so sagen müssen: Divisor und Quotient sind wechselseitig im Dividendus Form und Inhalt; ist nun der eine Inhalt (dividirt), so wird der andre Form (Quotient); ist aber der andre Inhalt (Divisor), so wird der eine Form (Quotient).

§. 41.

In jedem Produkte wurden die Faktoren dadurch Eins, daß sie sich nacheinander bequemten; in Sechse ließ sich die Zwei dreimal setzen, und die

Drei

Drei zweimal. Sieh aber zu, ob die Zahlen nicht noch auf andere Weise Eins werden können, ohne daß eine in die Form der andern eingeht.

O ja! die Zahlen können auch oberflächlich zusammengestellt werden, und erhalten dann doch einen gemeinschaftlichen Namen. Zwei und Drei, oder Drei und Zwei macht Fünfe.

Gut. Dieses oberflächliche Zusammenstellen der Zahlen heißt Addiren, und die Gesammtzahl heißt Summe, und durch Addition wachsen die Zahlen. Kehre nun aber das Verfahren auch um, wie du es bei der Multiplikation umkehren konntest.

Dieß ist leicht. Zwei von fünfe bleibt drei; drei von fünfe bleibt zwei.

Richtig. So hast du subtrahirt und Reste oder Unterschiede erhalten, wobei die Zahlen abnahmen. Im Grunde hast du hier neben eine größere setzende Zahl eine kleinere aufhebende gestellt, und dann gesehen, was noch übrig bleibe, oder um wie viel die setzende Zahl ihre aufhebende übertreffe. Immer aber hast du beim Addiren und Subtrahiren die Zahlen nur neben einander gestellt, ohne daß eine die Form der andern angenommen hätte; und so ist das ganze Verfahren oberflächlich geblieben, indeß die Multiplikation die Zahlen innig verbindet,

und

und die Division sie tief eingreifend auseinander reißt.

§. 42.

Jetzt hast du vier Rechnungsarten kennen gelernt, die ich wohl richtig so an die Tafel schreibe:

Multiplikation

Subtraktion Addition

Division

indem du nun einsiehst, daß die Multiplikation, deren vollkommenstes Werk die Stufenzahlen sind, die Zahlen weiter entwickelt, die Division aber, deren glücklichster Fund die Wurzeln sind, entwickelte Zahlen wieder auf ihre Anfänge zurückführt, indeß Addition die Zahlen oberflächlich von der Eins entfernt und Subtraktion sie ihr oberflächlich wieder nähert. Du hast also auch hier wieder, was die Vierzahl verlangt, einen ursprünglichen Gegensatz, zwischen welchem ein mittlerer den Uebergang macht.

Merke nun noch die Zeichen für diese Rechnungsarten: für die Multiplikation ein bloßer Punkt zwischen den zwei Faktoren oder ein ×, welches in zwei sich durchdringenden Linien schicklich die Wechseldurchdringung der Faktoren eines Produktes andeutet; für die Division ein Doppelpunkt oder die Bruchform der Zah-

len,

len, weil die Brüche auch Theilungen sind; für die Addition das Zeichen der setzenden Zahlen, weil die Addition zusetzend vermehrt, und für die Subtraktion den Queerstrich der aufhebenden Zahlen, weil die Subtraktion aufhebend vermindert.

§. 43.

Die vier Rechnungsarten zusammen zeigen dir die Veränderungen, durch welche die Zahlen durchgeführt in jeder auf eigenthümliche Weise verwandelt werden. Willst du dir diese Verwandlungen einer Zahl denken, daß sie z. B. als Inhalts- oder Formzahl mit einer andern zum Produkte werde, oder daß sie schon Produkt von einem ihrer Faktoren auf den andern gebracht werde, endlich daß sie um eine andere Zahl zu- oder abnehme; so brauchst du dazu eben nicht bestimmte Zahlen an die Tafel zu schreiben, sondern kannst dafür Buchstaben setzen. Vermittelst der eben angegebenen Zeichen der Rechnungsarten kannst du an Buchstaben alle Zahlenverwandlungen ausdrücken, z. B. $a + b = c$ das heißt, zwei Zahlen, deren die eine a die andre b heissen mag, geben zusammengestellt eine Summe, die c heissen mag; ferner $c - b = a$ heißt, b von der Summe weggenommen läßt a übrig; ferner $a \times b = d$ heißt, die Inhaltszahl a giebt mit der Formzahl b das Produkt d; ferner $d : b = a$ heißt, aus dem Produkt d findet

sich

sich durch den einen Faktor b der andere a. So kannst du also durch Buchstabenrechnung die Verwandlung der Zahlen ganz anschaulich machen, und was du so im Buchstaben erkannt hast, wirst du nachher an allen bestimmten Zahlen bewährt finden. Z. B. obige Buchstaben können heissen: a = 2, b = 3 dann ist ihre Summe c = 5 ihr Produkt d = 6. Heißt aber a = 8, b = 3, so ist ihre Summe c = 11 und ihr Produkt d = 24. Für andere Zahlen anders; aber wie mit den Zahlen verfahren worden sey, zeigt dir die Buchstabenrechnung vollkommen, und du brauchst hier nicht darauf Rücksicht zu nehmen, was jede einzelne Zahl gelte.

§. 44.

Vier sind also der Rechnungsarten und wir fanden sie, indem wir aus der Eins die Zahlen Zwei, Drei, Viere entwickelten. In der Viere liegt schon die erste Multiplikation, Zwei und Drei lassen sich addiren und subtrahiren. In der Viere liegt aber auch schon die erste Stufenzahl, und du weißst jetzt, daß eine Stufenzahl aus der Selbstmultiplikation einer Wurzel entsteht. Wenn nun eine Zahl mit sich selbst multiplicirt worden, was ist ihr geschehen?

Sie ist gesetzt worden auf eine Art, die in ihr selbst enthalten war.

Sehr gut. Wird also eine Zahl mit einer andern multiplicirt, so wird sie gesetzt auf eine Weise, die nicht in ihr selbst enthalten ist. In beiden Fällen aber wird die Zahl größer; warum wohl?

Weil sie in beiden Fällen wiederholt wird, im ersten Falle auf die ihr eigne, im andern Falle aber auf eine ihr fremde Weise. Weil nun im Produkte die Zahl mit ihren Wiederholungen in Eins zusammenfließt, so muß sie natürlich größer werden.

Wenn nun eine Zahl Lust bekäme, sich selbst auf die ihr eigne Weise immerfort zu wiederholen, so würde sie dadurch immer größer werden, und eine Reihe von Stufenzahlen bilden, die du nach der Anzahl von Wiederhohlungen der Wurzel zählen könntest, z. B. zwei, zweimal zwei, zweimal zweimal zwei u. s. f. oder in Ziffern 2, 2.2, 2.2.2, oder in Buchstaben: a, aa, aaa, u. s. f. In Ziffern oder Buchstaben pflegt man nun hier immer blos die Wurzel und oben auf eine kleine Zahl zu schreiben, welche die Wiederholungen, anzeigt, und Exponent oder Stufenzähler heißt, z. B. 2, 2^2, 2^3 oder a, a^2, a^3 u. s. f. welches du so weit führen kannst, als du willst. Wenn nun eine Zahl in Wiederhohlungen ihrer selbst so fortwächst, so kann sie über allen Begriff groß werden, geht aber dabei mit ihren Exponenten

wie

wie die einfache Zahlreihe den Wechsel des Geraden und Ungeraden hindurch, und wenn das Wesen einer Potenz darin besteht, daß sie ohne Beihülfe einer fremden Zahl ganz allein aus ihrer Wurzel entstehe, so wirst du wohl die Potenzen für die reinsten erkennen, deren Exponent selbst die Wurzel ist, oder doch von ihr abstammt. Für die Zahl Zwei bezeichnen demnach die Exponenten zwei, vier, acht u. s. w. reine Stufen, die Exponenten drei, fünf rc. aber unreine. In den reinen Stufen hat die Idee einer Potenz ihre vollständigste Darstellung.

§. 45.

Wenn du eine Stufenreihe hast, wie 2, 4, 8, 16, so kannst du zwischen jeden zwei Stufen dieser Reihe durch Addition und Subtraktion auf- und absteigen; z. B. zwischen 8 und 16 liegen mehrere Zahlen, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, welche alle über die Stufe von 8 hinausliegen, ohne jedoch die Stufe von 16 zu erreichen, und du kannst hier Additionen machen, wie 9+3, 10+2 u. s. w. und nach diesen auch Subtraktionen, welche alle zwischen den beiden Stufen auf- und absteigen. Hier siehst du, wie die Summen und Unterschiede eigentlich blos bestimmt sind, die Zwischenräume zwischen den Multiplikationsstufen auszufüllen, und wie eigentlich blos die Multiplikationsstufen und nament-

mentlich die Selbstmultiplikationen das Fortschreiten der Zahlen ausmachen. Additionen und Subtraktionen sind blosse Lückenbüsser.

§. 46.

Erinnerst du dich noch der Stufenfolge: Laut, Wort, Satz, Rede, welches eine Stufenfolge des Unterrichts und nicht blos der Zahlen war? Ich will dir nun noch eine ähnliche Stufenfolge aus dem Wesen unserer Erde angeben. Schreibe:

Mineral, Pflanze, Thier, Mensch

und ich sage, das Mineral ist hier, was dort der Laut ist, nämlich das Element aus dem Alles gebildet ist; ferner: die Pflanze ist hier, was dort das Wort ist, nämlich die erste entwickelte Bildung; ferner; das Thier ist hier, was dort der Satz ist, nämlich das erste geschlossene Ganze, ferner: der Mensch ist hier, was dort die Rede ist, nämlich das erste entwickelte Ganze. Verstehst du dieß? — So sind also in einer Stufenfolge die Verhältnisse wie in der andern. Jetzt sage ich weiter: zwischen jeden zwei Stufen liegen, wie bei den Stufenreihen der Zahlen, viele Dinge, die bald der einen bald der andern Stufe sich nähern, ohne doch auf die niedre Stufe herabzusinken oder die höhere zu erreichen. Z. B. zwischen dem Metall, als dem am meisten mineralischen Mineral,

ral, und der Pflanze liegen viele Mineralien, welche sich über das Metall erheben, ohne jedoch die Pflanze zu erreichen, der jedoch mehrere z. B. der Asbest, durch Fasernbildung schon nahe kommen; eben so, zwischen der niedrigsten Pflanze, der Flechte, und dem Thiere, liegen viele Mitteldinge, die über die Flechte sich erheben, ohne das Thier zu erreichen, und so ist es zwischen allen Stufen. Die Stufen selbst sind also wie die Zahlpotenzen, und was zwischen die Stufen fällt, ist gleich jenen Zahlen, die mit Additionen und Subtraktionen zwischen die Potenzen hineinfallen.

§. 47.

Von allen Wurzeln aber ist die erste die Zwei, von allen Potenzen die erste ist die Viere. Nun aber ist die Zwei der Gegensatz selbst, und du kannst daraus schließen, daß dieser der Grund aller Fortentwicklung der Dinge sei, und daß sie in dieser Fortentwicklung Gegensatz auf Gegensatz thürmen, wie du schon in der Viere siehst, in welcher zwei Gegensätze sich in einander verflechten. Wie in einem Gegensatze die zwei Glieder einander das Gleichgewicht halten, so halten sich auch Gegensätze selbst untereinander das Gleichgewicht, und wie unter den Gliedern Eines Gegensatzes ein setzendes und ein einschränkendes ist, so ist auch von zwei Gegensätzen der eine ursprünglich

der

der andere nur vermittelnd und bestimmt jenen näher. Dieß alles zeigen die vorhin gegebenen Beispiele.

§. 48.

In der Viere hat sich also die Eins ganz in zwei Gegensätze getheilt, die sich unter einander halten und tragen, also getrennt und doch Eins sind. Bildlich siehst du dieß an zwei Linien, deren jede zwei Endpunkte (Gegensatz) hat, und welche kreuzweis gelegt in Einem Punkte sich schneiden oder durchdringen, und von diesem Punkte aus gesehen vier Linien darstellen. In diesen vier Linien ist der Punkt auseinander gegangen, wie die Eins in der Zahl Viere, und du wirst mich nun wohl verstehn, wenn ich sage: Eins ist Anfang, Zwei ist Fortgang, Drei ist Erweiterung, Viere ist Vollendung.

§. 49.

Wenn nun die Viere die Vollendung der Eins ist, diese aber der Anfang und die Mutter der Zahlen, so liegen zwischen beiden Zahlen Zwei und Drei, oder das Gerade und Ungerade, und was hernach folgt, ist blos vollständige oder unvollständige Wiederholung des Gegensatzes. Laß uns also darauf denken, die Viere als die entwickelte Eins angemessen zu bezeichnen, und ich schlage dir hiezu die Kreisfigur vor,

weil

weil diese so sinnlich schön ein Ganzes ausdrückt. Stelle also zu deinen neun Ziffern noch einen kleinen Ring.

Das ist ja die Null, was hat diese mit der Viere zu thun?

Wir wollen sehn. Setze jetzt zu diesem Ringe noch die Eins, um anzuzeigen, daß hier, wo die Zahl Viere steht, die Entwicklung der Eins geschlossen sey, so hast du die Ziffer: 10.

Das wäre ja Zehne! Kann denn die Viere Zehne heissen?

Nein, mein Freund! Aber diese Doppelziffer, die du Zehne zu nennen gewohnt bist, weil man sie immer nach der Neune zu setzen pflegt, zeigt eigentlich nichts an als die geschlossene Entwicklung der Eins, und muß also, weil die Eins in der Viere schon ihre Entwicklung schließt, an der Stelle stehen, wo jetzt die Viere steht. Vor alten Zeiten noch wurde die Null mit dem griechischen $\triangle$, welches Viere bedeutet, geschrieben, nämlich: $\bigcirc\hspace{-0.85em}\triangle$, woraus zu ersehen ist, daß auch das Alterthum noch einsah, die Null gehöre an die Stelle der Viere; schon lange her ist es aber freilich Sitte geworden, die Null als das Zeichen der geschlossenen Entwicklung sammt der Eins, deren Entwicklung sie anzeigt, nach der Neune zu setzen, wo

 sie

sie denn freilich Zehne genannt worden ist, und wir zählen jetzt bis auf Zehne, da man eigentlich blos bis auf vier zählen, und nach dieser wieder von vorne anfangen sollte, wie man jetzt mit der Eilfe von vorne anfängt.

Warum aber zählt man jetzt bis auf Zehne? Hätte man nicht vor der Zehne schon umkehren, oder über sie hinauszählen können?

Schon Karl XII, König von Schweden, meinte, man müßte über die Zehne hinaus bis auf 16 zählen, weil diese Zahl am geschicktesten auf Zwei zurückgebracht werden könnte, und neuere Mathematiker haben in Vorschlag gebracht, bis auf Zwölfe zu zählen. Beide Erweiterungen würden für den Ausdruck großer Zahlen Vortheil gewähren, indem die Ziffer, welche jetzt Hundert ausdrückt, nach dem Zwölfsysteme 144, nach dem Sechszehnsysteme aber 256 ausdrücken würde. Warum man gerade bis auf Zehne zählt, weiß ich nicht. Vielleicht, weil die Zahlen 1, 2, 3, 4 die Zehne zur Summe geben, oder auch, weil in der Viere nur die Zwei ihre Selbstmultiplikation hat, welche die Drei in der Neune erst findet. Zwei und Drei sind aber ja eigentlich die einzigen einfachen Zahlen.

Anmerkung. Das Sechszehnsystem läuft auf die Viere als die Wurzel von Sechszehn zurück,

rück, und ist darum das natürliche. Es hat keine andere Schwierigkeit, als daß für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15 noch einfache Ziffern erfunden werden müssen.

---

§. 50.

Auf das Dekadensystem ist nun aber unsere ganze Zifferrechnung gebaut. Was über Neune hinausgehend mehrere Ziffern hat, wird so gelesen, daß jede der nebeneinander stehenden Ziffern von der Rechten nach der Linken zu in einer neuen Stufe der Zehner verstanden wird. In der zusammengesetzten Ziffer: 1234567 bezeichnet die 7 die Stufe der einfachen Zahlen, also sieben schlechtweg; die 6 bezeichnet die Zehnerstufe, also hier 6 Zehner das ist sechszig, die 5 bezeichnet die Stufe der Hunderten, also hier 500, und so geht es in beständigen Multiplikationen mit Zehne fort, bis auf die Eins, welche hier Million heißt. Diese ganze Ziffer heißt also: eine Million, zweihundert vier und dreißigtausend, fünfhundert und sieben und sechzig. Aus dieser Geltung der Zahlen nach ihrer Stelle siehst du nun leicht ein, daß bei allen Rechnungen, der Ueberschuß, der den Umfang einer Zifferstelle oder Zehnerstufe überschreitet, in die nächst darauf folgende

Stelle hinübergetragen werden muß, z. B. in folgender Addition:

24
57
93
45
―――
219

Hier hattest du durch Addition der hintersten Reihe 19 erhalten, welches um zehne den Umfang der hintersten Stelle oder der einfachen Zahlen übersteigt. Diesen Ueberschuß mußtest du also als Ein Glied der höhern Ordnung, d. h. als einen Zehner, in die folgende Reihe übertragen, wodurch diese nun 21, d. h. ein Zehner und zwei Hunderter wird. Wie du nun in der Addition den Ueberschuß aus einer Zahlenstufe in die andre hinüberträgst, so kannst du in der Subtraktion das Bedürfniß der niedern Stufe aus der höhern befriedigen, z. B.

5462
523
―――
4939

Hier war in der hintersten Stufe 3 von 2 abzuziehen, welches nicht angeht. Es mußte also die 2 durch Zusatz eines Zehners aus der darauffolgenden Reihe vermehrt werden. Nun aber 3 von 12 abzuziehen, und es blieb 9, und die obere Zehnerstufe war jetzt um einen vermindert, also nur noch 50, und

und von dieser 5 auf der Zehnerstufe war jetzt 2 ebenfalls auf der Zehnerstufe abzuziehen. Im folgenden Gliede der Hunderte war die obere Zahl sogleich wieder zu klein und mußte sich aus der höhern Stufe der Tausender vergrößern, wodurch denn die Tausender von 5 auf 4 herabkamen. — Bei Multiplikationen wird nun wie bei Additionen übertragend, bei Divisionen aber wie bei Subtraktionen borgend verfahren.

§. 51.

Also in unserer zehnstufigen Art zu zählen ist die Zehne der Schlußpunkt der einfachen Zahlen, und wenn die Null nur allein an der Stelle der einfachen Zahlen vorkommt, so ist dieß ein Zeichen, daß keine einfache Zahl hier vorhanden sey, z. B. in 420; kommt die Null an der Stelle der Zehner vor, so ist dieß ein Zeichen, daß kein Zehner, sondern blos die Stufe der Zehner, vorhanden sei, wie z. B. in 402. Ueberall also in unsern geschriebenen Ziffern dient die Null als Zeichen der Abwesenheit einer bestimmten Zahl auf dieser Zifferstufe. Daher zeigt die Ziffer 4000 mit ihren drei Nullen an, daß die Stufen der einfachen Zahlen, der Zehner und der Hunderter hier

ohne bestimmte Zahl seyen, und allein die Stufe der Tausender ihre bestimmte Zahl habe. Wären die Nullen weggelassen, so würdest du nicht erkennen, daß die 4 auf der Stufe der Tausender stünde. Du siehst also, daß in unserer Schreibart der Ziffern die Nullen die Stufe überhaupt, ohne bestimmte Zahl auf dieser Stufe anzeigen. Dadurch ist die Null mit Unrecht in den Ruf gekommen, daß sie Nichts bedeute, und man braucht sie zum Zeichen, wenn keine Zahl mehr vorhanden ist, z. B. 4 — 4 = 0.

§. 52.

Noch einmal fasse die Null recht ins Auge. Sie ist Nichts, in so fern sie keine bestimmte Zahl ist; da sie aber die Stufe bezeichnet, auf welcher sich alle bestimmte Zahlen entwickeln, und da diese Stufe eigentlich die Eins ist, die nach jeder Stufe sich von neuem aufschließt und neun einfache Zahlen entwickelt, so ist die Null eigentlich wie die Eins Alles, nur steht die Eins vor der Entwicklung als Anfang, die die Null aber nach der Entwicklung als Ende, und wenn ich jetzt an die Tafel schreibe:

1

2 3

0

so heißt dieß eben so viel als: Anfang, Mittel, Ende, und das Mittel ist hier auch wieder doppelt, nämlich Gerades und Ungerades. Lies also jetzt:

Eins

Gerades Ungerades

Null

das heißt: wenn die Dinge ihre unentwickelte Einheit verlassen, so gehen sie durch gerade Gegensätze, deren Glieder sich das Gleichgewicht halten, und ungerade Gegensätze, denen ein Glied zum Gleichgewichte fehlt, die also Ergänzung suchen, zur geschlossenen Entwicklung fort. Gerade Gegensätze aber geben durch das Gleichgewicht ihrer Glieder ein ruhiges Bestehen, ungerade aber suchen sich zu ergänzen und geben Veränderung; wie wäre es also, wenn du statt alles Geraden: Natur und statt alles Ungeraden: Geschichte setztest, und so an die Tafel schriebest:

Eins

Natur Geschichte.

All

§. 53.

Verstehst du jetzt, wie die Eins und die Null mit dem Geraden und Ungeraden, so an die Tafel geschrie-

schrieben, der allgemeine Ausdruck für alles sind, was sich entwickelt hat?

Ich verstehe wohl, wie in den Zahlen nichts anders vorkommen kann als diese viere, denn es möchte wohl niemand ausser der Eins und der Null eine Zahl finden, die nicht gerade oder ungerade wäre; aber daß es mit allen andern Dingen auch so seyn soll; sehe ich noch nicht ein.

Ich freue mich, daß du vorerst einsiehst, daß diese vier Begriffe das ganze Wesen der Zahlen umfassen. Was sind denn nun aber die Zahlen? sind sie nicht Bilder, in welchen du die sich entwickelnde Vielheit der Dinge für dein Denken festhältst? Wie viel Blätter hat die Rose? So viel sich aus ihr entwickelt haben, nicht wahr? und du denkst dir diese Entwicklungsmenge mit einem Zahlworte. Wenn nun die Zahlen blos die Entwicklung der Dinge Schritt für Schritt begleiten, so muß wohl, was von den Zahlen gilt, für alle Dinge gelten; alle entwickeln sich von irgend einer Eins durch Gerades oder Ungerades bis zu ihrer Null, das heißt bis zu ihrer Blume oder vollständig dargestellten Entwicklung.

§. 54.

Verstehst du jetzt auch den Wechsel des Geraden und des Ungeraden in den Zahlen? Lernst du nicht Grammatik?

Was soll mir hier die Grammatik helfen, wo von Zahlen blos die Rede ist?

Sagte ich nicht eben, was von den Zahlen gelte, das gelte von allen Dingen? Ich merke, daß dir diese Ideen erst durch Gewohnheit noch etwas geläufiger werden müssen. — Nicht wahr, in der Sprachlehre heißt das Wort: Sprache, ein Hauptwort? und das Wort: sprechen, ein Zeitwort? und lassen sich nicht beide in einander verwandeln? und wie? nicht wahr, wenn du dir zu der Sprache, die du als eine Sache betrachtest, eine Person hinzudenkst, in welcher diese Sache zur Handlung wird? oder wenn du umgekehrt, das Persönliche und Handelnde hinzudenkst? — Sey nun so gut, und blicke aufmerksam auf die Zahlen, ob nicht eine gerade Zahl zur ungeraden wird, wenn du die Eins zu ihr hinzudenkst; und ob nicht umgekehrt eine ungerade Zahl zur geraden wird, wenn du die Eins hinwegdenkst? Ist nun nicht der handelnde

Mensch

Mensch der lebendige Entwickler der ganzen Sprache, wie die Eins die lebendige Mutter aller Zahlen?

So scheinen die geraden Zahlen wie Substantive, die ungeraden aber wie Zeitwörter zu seyn?

So ist es auch, und da die geraden Zahlen den Anfang machen, weil die erste Zahl die Zwei ist, so ist auch jede ungerade Zahl das Zeitwort von der vorhergehenden geraden Zahl, und wenn z. B. die Viere, das Ding bezeichnet, dessen Grundform viereckigt ist, das Mineral, so wird die Fünfe dieses Mineral in Entwicklung versetzt anzeigen; ein Mineral in Entwicklung versetzt heißt aber Pflanze. Beim gewöhnlichen Rechnen pflegt man nun freilich eben so wenig an diese innere Bedeutung der Zahlen zu denken, als dein fünfjähriger Bruder Philipp daran denkt, daß sein Name im Griechischen einen Pferdeliebhaber bezeichnet. Zahlen und Namen sind bedeutungslos geworden.

§. 55.

Im Rechnen bedeuten die Zahlen jetzt nur noch ein Vielfaches ohne innere Eigenthümlichkeit, und die Unterschiede desselben von Mehr und Minder, höchstens

hast

hast du die vielfachen Dinge auf einerlei Namen zu bringen. Z. B. willst du Haasen, Hunde, Hühner und Pferde zusammenrechnen, so mußst du sie allesammt Thiere nennen; eben so, wenn du Gulden, Kreutzer und Pfenninge zusammenrechnen willst, mußst du alles zu Pfenningen machen. So kommen Zahlen auf einerlei Namen, ohne daß jedoch von dem innern Wesen der bezeichneten Dinge die Rede wäre, und man vergleicht sie auch blos äusserlich miteinander, wie viel etwa zwanzig Thiere mehr sind als zwölfe. Wie nun in solchen bedeutungslosen Zahlen die Addition und Subtraktion gemacht werde, hast du vorhin (§. 50) gesehen, und ich will dir jetzt nur noch die Multiplikation und Division zeigen. Setze die Multiplikation einer Zahl, die mehrere Stufen hat, mit einer andern ebenfalls von mehrern Stufen, so arbeitest du erst die Inhaltszahl mit der letzten Stufe der Formzahl, dann mit der vorletzten u. s. f., mit jeder allein durch, rükst das Produkt aller dieser Multiplikationen immer um eine Stelle unter dem vorigen Produkt vor, und addirst endlich, nachdem auf diese Art jedes Produkt seine gehörige Stelle erhalten hat, diese theilweisen Produkte zusammen, z. B.

23445

```
 23445
  2345
------
117225
 93780
 70335
46890
--------
54978525
```

Du begreifst leicht, daß bei dieser Art die theilweisen Produkte unter einander zu schreiben, die Produkte der verschiedenen Stufen ihre richtige Stelle erhalten; in der ersten Reihe stand das Produkt der Inhaltszahl mit dem einfachen Theile der Formzahl, in der zweiten Reihe ihr Produkt mit den Zehnern der Formzahl u. s. w. und unter dem Queerstriche endlich die Summe aller dieser Produkte.

§. 56.

Dieselbe Ansicht der Zahlstufen muß dich auch lehren, eine Divisionsaufgabe in mehrtheiligen Ziffern zu lösen. Du suchst nämlich den Divisor erst in dem ihm zunächst angemessenen Theile des Dividendus, und erhältst dadurch den Anfang des Quotienten. Dann siehst du, ob nicht ein Rest bleibe, wenn du mit dem gefundenen Anfange des Quotienten den Divisor multiplicirst, und das Produkt mit jenem ersten Theile

des

des Quotienten vergleichst. Zu diesem Reste nimmst du denn wieder eine Ziffer des Dividendus hinzu, in welcher nebst jenem Reste du dann wieder einen Theil des Quotienten findest, und so fortfährst, bis der Dividendus erschöpft ist, z. B.

```
32) 7840 [245
    64|
    ---
    144
    128
    ----
     160
     160
     ---
       0
```

Hier war der erste Rest 14, zu welchem dann aus dem Dividendus 4 herabgezogen wurde, um eine neue Division möglich zu machen; der zweite Rest war dann 16, zu welchem für die Möglichkeit einer neuen Division die Null herabgezogen wurde.

§. 57.

Erinnerst du dich nun noch der Ansicht, die wir schon früh (§ 26) fanden, daß die sogenannten ganzen Zahlen eigentlich Brüche von der Eins wären, aus welchen alle Zahlen durch Theilung entstehen? So begreifst du nun auch, daß man die Sechse als eine in 6 Theile getheilte Eins ansehn, und von die-

sen Sechsteln beliebig viele, etwa fünfe, auffassen kann. Diese fünf Sechstel werden dann $\frac{5}{6}$ geschrieben, und die obere Zahl heißt Zähler, die untere Nenner. Offenbar ist bei allen Brüchen der Nenner das Wesentliche, weil er angiebt, wie weit sich die Einheit getheilt habe; denn wie viele von diesen Theilen du dann nehmen willst, ist ja willkührlich, und nur dieses bestimmt der Zähler. Brüche sind also der Ziffernausdruck in sich getheilter Einheit, und da die Theilung der Einheit allen Zahlen den Ursprung giebt, da ferner diese Theilung mehr oder minder einfach fortgesetzt werden kann; so erscheint an den Brüchen alles, was an den ganzen Zahlen erscheinen kann, nämlich Vermehrung und Verminderung mit ihren zweimal zwei Formen oder Rechnungsarten. Da aber ein Bruch immer zwei Zahlen, nämlich Zähler und Nenner, enthält, so erscheinen jene vier Rechnungsarten hier etwas künstlicher, und namentlich haben die Brüche für ihre Addition und Subtraktion eine Vorbereitung nöthig, die sie auf einerlei Stufe der Theilung, oder, wie man es nennt, auf einerlei Nenner, bringt. Sind sie nämlich auf einerlei Stufe der Theilung, so kann erst be-

stimmt werden, welcher von zweien Brüchen mehr oder minder der gemachten Theile enthalte, oder wie viel beide zusammen enthalten. Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ stehen nicht auf einerlei Stufe der Theilung, wohl aber die zwei Brüche $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$, deren Unterschied in $\frac{4}{8}$, deren Summe in $\frac{10}{8}$ bestehen wird.

§. 58.

Es seyen also die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ auf einerlei Theilungsstufe oder Nenner zu bringen. Du weißst, wenn Zahlen sich multipliciren, so theilen sie einander wechselseitig ihr Wesen mit. Nimm also jetzt den Nenner 6 von dem andern Bruche, und multiplicire damit den Nenner 4 des einen Bruchs, so hast du diesen Bruch, der Viertel enthielt, auf Vierundzwanzigstel, also auf eine höhere Stufe der Theilung gebracht. Weil nun die Theile um so viel kleiner werden, als die Theilung weiter vorgeschritten ist, so mußst du, um die vorige Grösse des Bruches beizubehalten, so viel mehr Theile machen, also den Zähler 3 nun auch mit 6 multipliciren; der Bruch $\frac{3}{4}$ wird also nun $\frac{18}{24}$ heißen. Laß nun den andern Bruch $\frac{5}{6}$ eben so die Form des einen Bruchs annehmen, so multiplicirst du seine beiden Zahlen mit

dem

dem Nenner, 4, und erhältst also statt der $\frac{5}{6}$ jetzt $\frac{20}{24}$, und die beiden Brüche haben hier wechselseitig sich auf gleiche Theilungsstufe erhoben, ohne ihre vorige Größe zu ändern. Denn $\frac{18}{24}$ ist $= \frac{3}{4}$ und $\frac{20}{24}$ ist $= \frac{5}{6}$. Nun kannst du auch den Unterschied beider Brüche $= \frac{2}{24}$ und ihre Summe $= \frac{38}{24}$ bestimmen. Schön ist es in der That, wie hier die beiden Brüche einander ihr Wesen mitgetheilt haben, indem jeder sich durch den andern auf eine höhere Theilungsstufe erheben ließ, welche dann für beide dieselbe wurde, weil die Erhebung gegenseitig war. In Buchstaben ausgedrückt wird dieß recht anschaulich, z. B. die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf einerlei Nenner gebracht heissen: $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{cb}{bd}$. — Hierauf also beruht die Addition und Subtraktion der Brüche.

§. 59.

Die Multiplikation zweier Brüche wirst du nun leicht verstehn als ein Verfahren, in welchem die zwei Brüche so in Einem Produkte verschwinden, daß sie in diesem eine Theilungsstufe erhalten haben, welche das gemeinschaftliche Produkt ihrer besondern Theilungsstufen ist, und eine Anzahl Theile, welche das Produkt aus der besondern Anzahl

eines

eines jeden Bruches ist. Dieß giebt in Ziffern eine Multiplikation des Nenners mit dem Nenner, des Zählers mit dem Zähler und aus beiden einen neuen Bruch, in welchem die Anzahl der Theile nicht in dem Maaße vermehrt worden, als die Theilung selbst vorgeschritten ist. Daher denn hier die anscheinend sonderbare Erscheinung, daß das Product kleiner ist als seine Faktoren, z. B. $\frac{3}{5} \frac{5}{9} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$. In Buchstaben ausgedrückt zeigt sich die Multiplikation der Brüche so: $\frac{a}{b} \frac{c}{d} \frac{ac}{bd}$

§. 60.

Die Division der Brüche, wo beide an einander sich messen sollen, wie oft der eine in dem andern enthalten sey, könnte dir ein Räthsel seyn, hättest du nicht verschiedene Brüche auf einerlei Nenner bringen und sie dadurch überhaupt vergleichen gelernt. Sind sie auf einerlei Nenner gebracht, so sind sie gerade so oft in einander enthalten, als ihre Zähler in einander enthalten sind, und du brauchst also, weil (§. 26. 42. 57.) jeder Bruch eine Division ist, nur einen neuen Bruch zu bilden, in welchem der Zähler des Dividendus den Zähler, der Zähler des Divisors aber den Nenner ausmacht. Z. B. $\frac{3}{4}$ sey durch $\frac{5}{8}$

zu dividiren, so geben beide Brüche auf einerlei Nenner gebracht $\frac{20}{32}$ und $\frac{24}{32}$, ihre Division also besteh in dem Bruche $\frac{24}{20}$ oder $\frac{6}{5}$. In Buchstaben ist — $\frac{a}{b}$ dividirt durch $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db} = \frac{ad}{cb}$, woraus das mechanisch kürzere Verfahren, den zu dividirenden Bruch mit dem umgekehrten Divisor zu multipliciren $\frac{a}{b}\ \frac{d}{c}$ oder die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ übers Kreuz $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ zu multipliciren, sich rechtfertigt.

§. 61.

Willst du nun etwa noch einsehn, wie durch die vier Rechnungsarten hindurch Brüche mit Ganzen und umgekehrt in Verhältniß gebracht werden können, so mußst du dich zuvörderst erinnern, daß Brüche selber zu Ganzen werden, wenn Zähler und Nenner sich gleich sind, weil dann alle Theile des Ganzen zusammen genommen werden; so kannst du also leicht jedes Ganze als einen Bruch schreiben, der mit einem andern Bruche gleichen Nenner hat, und also mit diesem eine Summe oder einen Unterschied giebt. Verlangt man etwa die Summe oder den Unterschied von Einem Ganzen und dem Bruche $\frac{3}{4}$,

so enthält dieses Ganze $\frac{4}{4}$, die du nun leicht mit jenen $\frac{3}{4}$ wirst in Addition oder Subtraktion bringen können.

Nicht so ganz einfach ist aber die Multiplikation und Division zwischen Brüchen und Ganzen, und jede dieser Rechnungsarten kann hier zwiefach gesetzt werden, je nachdem nämlich der Bruch oder die ganze Zahl als Formzahl erscheint. Setze nun:

I. Ganze mit Brüchen multiplicirt, wobei also die Brüche die Formzahl sind. Z. B. $9 \times \frac{1}{3}$. Hier soll also die Inhaltszahl 9 in einer Art genommen werden, welche durch den Bruch $\frac{1}{3}$ bestimmt wird, also nicht ganz soll sie gesetzt werden, sondern blos zu einem Drittheil ihres Inhaltes. Dieses Drittheil von 9 wird auch auf die gewöhnliche Weise erhalten, wenn du den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirst, denn $\frac{9}{3}$ ist auch 3.

II. Brüche mit Ganzen zu multipliciren, wobei also die ganze Zahl Formzahl ist, z. B. $\frac{1}{3}$ mit 9. Hier soll also der Bruch $\frac{1}{3}$ so weit eine ganze Zahl werden, als es durch seine Multiplikation mit 9 geschehen kann. Du erhältst also nun statt einem

Drittheile deren neune, und diese geben wie vorhin drei Ganze.

III. Ganze mit Brüchen dividirt, daß also gesucht wird, wie oft der Bruch in der ganzen Zahl enthalten sey, z. B. 4 dividirt durch $\frac{1}{2}$. Dieß heißt: die Zahl 4 soll auf Hälften gebracht werden, und deren sind 8. Aeusserlich also multiplicirst du hier die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, und hast sie dadurch zugleich auf einerlei Nenner mit diesem gebracht.

IV. Brüche mit Ganzen dividirt, daß also gesucht wird, wie oft die ganze Zahl in dem Bruche enthalten sey, z. B. $\frac{6}{8}$ dividirt durch 2. Dieß giebt halb so viel Achtel, also $\frac{3}{8}$, was sich äusserlich durch die Division des Zählers mit der ganzen Zahl macht.

In Nro. III. also wurde eine ganze Zahl auf eine bestimmte Berechnung gebracht, in Nro. IV. wurde ein Bruch als Ganzes betrachtet (in seinem Zähler), und von einer ganzen Zahl auf die ihr eigene Weise getheilt.

§. 62.

Noch will ich dir, ehe wir die Brüche verlassen, ein interessantes Spiel der Gegensätze an ihnen anschau-

anschaulich machen. Du weißt, wie Zähler und Nenner einander entgegengesetzt sind, indem der erste den Dividendus, der zweite den Theiler vorstellt, der ganze Bruch aber Quotient ist. Nun sieh einmal zu, was erfolgt, wenn beide auf einerlei oder verschiedene Weise behandelt werden; du wirst sehen, daß sie bei gleicher Behandlung entgegengesetzte Resultate geben.

Zuerst werde multiplicirt a) der Zähler, z. B. der Bruch $\frac{6}{8}$ giebt nach der Multiplikation des Zählers mit 2 zwölf Achtel, die Größe des Bruchs wurde also verdoppelt; b) der Nenner mit 2 multiplicirt, giebt $\frac{6}{16}$, verkleinert also den Bruch um die Hälfte, weil Sechszehntel gerade halb so groß sind als Achtel. Ferner werde dividirt a) der Zähler; $\frac{6}{8}$ im Zähler mit 2 dividirt giebt $\frac{3}{8}$ halbirt also den Bruch; b) der Nenner; $\frac{6}{8}$ im Nenner mit 2 dividirt, giebt $\frac{6}{4}$, verdoppelt also den Bruch. Werden aber beide Theile eines Bruches zugleich von derselben Zahl auf dieselbe Weise behandelt, so bleibt der Bruch in sich unverändert, weil die Behandlung des einen Theils aufhebt, was die Behandlung des andern Theiles gesetzt hatte. Hat der Bruch durch die Multiplikation des Zählers mehr Theile erhalten,

ten, so werden diese dafür durch die Multiplikation des Nenners um eben so viel *kleiner*; hat der Bruch durch die Division des Zählers *weniger* Theile erhalten, so werden sie dafür durch die Division des Nenners um so viel *größer*. Du siehst hier das Spiel der Gegensätze:

mehr ✕ weniger
größer ✕ kleiner

so deutlich, daß du nicht verkennen kannst, wie dieses ganze Rechnungsverfahren auf dem viergliedrigen sich durchkreutzenden Gegensatze sich gründet.

§. 63.

Unser zehnstufiges Zählen hat noch eine besondre Art von Brüchen erzeugt, deren Nenner aus Stufen der Zehne bestehen, und welche *Dezimalbrüche* heissen, z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$ $\frac{5}{1000}$ u. s. w. Da der Nenner hier überall nur aus Stufen der Zehne besteht, so schreibt man auch blos den Zähler und deutet ihn ihm durch ein Komma die Stufen des Nenners an, die, wenn sie geschrieben werden sollen, allerdings durch blosse Nullen ausgedrückt werden müssen. So erscheinen die vorhin gegebenen Brüche

nach

nach ihrer gewöhnlichen Art in Ziffern also geschrieben: 0,3 das ist drei Zehntel, 0,04 d. i. vier Hundertel, 0,005 d. i. fünf Tausendtel, so daß also die nach dem Komma folgenden Nullen oder Ziffern mit ihrer Anzahl blos die Stufen des Nenners andeuten. Die Stelle vor dem Komma, die bei reinen Dezimalbrüchen eigentlich ohne Ziffer und darum stellvertretend mit einer Null besetzt ist, kann auch Ziffern aufnehmen, welche dann Ganze bezeichnen, und den Dezimalbruch an sich hängen haben, oder auch mit in die Brechung hineingezogen werden. Z. B. 3, 14 heißt drei Ganze und $\frac{14}{100}$ oder was gleichviel ist, $\frac{314}{100}$. Gemeinhin heißt es nun, man könne, ohne den Werth desselben zu ändern, an jeden Dezimalbruch so viele Nullen anhängen, als man nur wolle; allein du begreifst leicht, daß Nullen an einen auf die angezeigte Weise geschriebenen Dezimalbruch angehängt, seinen Zähler und Nenner zugleich gelten, und darum den Bruch selbst ungeändert lassen. Eben so bleibt ein Dezimalbruch auch bei dem Wegstreichen von Nullen am Ende gleichgültig.

Uebrigens sind Dezimalbrüche wie andere Brüche, und die vier Rechnungsarten lassen sich an ihnen

auch,

auch, wie an den anderen Brüchen durchführen. Das Eigenthümliche, was ihre Behandlung nach den gewöhnlichen Lehrbüchern hat, ist blos abkürzend und beruht auf der Art sie zu schreiben, in welcher Zähler und Nenner zugleich ausgedrückt eine Behandlung wie ganzer Zahlen gestatten, bei welchen es noch nicht zu der Trennung von Zähler und Nenner gekommen ist. Merke nur noch, daß bei der Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen das Komma genau beobachtet werden muß, welches hier die ganze Zahl von dem angehängten Bruche trennt, und nach welchem auch die Ziffern untereinander gestellt werden, z. B.

Addition	Subtraktion
3,14	87,900005
0,2	2,0508006
829,0017	———————
0,000009	85,8492044
———————	
832,341709	

bei Multiplikationen und Divisionen aber auf die gehörige Vermehrung oder Verminderung der Dezimalstellen Rücksicht zu nehmen ist; z. B.

Multiplikation Division

$$\begin{array}{r} 4,253 \\ 0,0\,004 \\ \hline 0,001\,7012 \end{array} \qquad \frac{0,024}{0,08} = 0,3.$$

wo das Produkt so viele Dezimalstellen hat als die Faktoren zusammen, der Quotient aber nur so viele, als das Dividendum über den Divisor voraus hatte.

Drit-

Drittes Buch.

Raumbilderlehre.

§. 64.

Was ist in Zahlen das Kleinste? Die Einheit. — Warum? Weil noch keine Vielheit in ihr gesetzt ist. — Was ist in Zahlen das Gröste? Die Einheit. — Warum? Weil alle Vielheit nur in ihr gesetzt werden kann. Wie heißt sie, wenn alle Vielheit in ihr gesetzt gedacht wird? Null, Alles, Ganzes. — Was ist im Raume das Kleinste? Ein Punkt. Warum? Weil er sich noch nicht ausgedehnt hat. — Was ist im Raume das Gröste? Der Punkt, wenn er sich ausgedehnt hat, denn er kann sich über alles ausdehnen. — Wie heißt der Punkt, wenn er sich nach allen Seiten gleichförmig ausgedehnt hat? Kreis.

§. 65.

Nenne mir die gröste unter den Zahlen. Ich vermag es nicht. — Warum nicht? Weil über jede

Zahl hinaus noch eine größere möglich ist. Zeichne mir den Punkt! Ich vermag es nicht. — Warum nicht? Weil jeder gezeichnete Punkt noch eine Ausdehnung hat, die er nicht haben sollte; denn der Punkt sollte eben das noch Unausgedehnte seyn, wie in den Zahlen die Eins das noch Unentwickelte ist. — Du kannst also im Grunde den Punkt nicht zeichnen, sondern nur andeuten, so wie du in den Zahlen die gröste Zahl, welche das All erschöpft, nicht angeben kannst. Statt dieser Zahl mußst du den Schluß der Zahlen, die Null, setzen, und statt des Punktes im Raume irgend eine, wenn auch noch so kleine, Kreisfläche. Aber in den Zahlen hast du die Eins wirklich, im Raume den Kreis.

§. 66.

Laß nun die Eins und die Null für die Zahlen oder Zeitbilder, und versuche jetzt aus Punkt und Kreis Raumbilder zu entwickeln. Stelle vorerst beide richtig, den Punkt und den Kreis. Wie stellst du sie richtig? Nicht wahr, wenn der Kreis in dem Punkte enthalten, der Punkt aber zum Kreise ausgedehnt erscheint? Dieß kannst du aber nicht; denn wie soll in den Punkt ein Kreis hineingestellt werden?

Ver-

Versuche also das umgekehrte, und stelle den Punkt in den Kreis, aber so, daß er überall von dem Kreise gleich weit entfernt sey. So heißt er nun Mittelpunkt, und der Kreis kann angesehen werden, als hätte er sich aus diesem Punkte bis zu solchem Umfange entwickelt. Wenn du aber nun den Punkt und Kreis so hinzeichnest, so ist der Kreis eine Linie in gleichen Entfernungen um den Punkt gezogen. Was ist denn nun eine Linie? Sage, ein Strich, so bist du schnell fertig. Aber was ist denn ein Strich? — Nimm dich zusammen, und erinnere dich, daß ein Ding im Raume Länge, Breite, Dicke und Tiefe hat, und fahre mit deinem Finger in der Luft herum, um mir, als ob ich etwas ungeschickt im Verstehen wäre, diese Dinge anschaulich zu machen. Wenn du nun so herumfährst mit dem Finger in der Luft, und die Luft wäre Wasser und dein Finger wäre ein Schiff, so würde man im Wasser hinter deinem Schiffe noch einen Augenblick merken, wo du gefahren wärest; und wenn nun dein Finger ein Bleistift wäre, und das Wasser Papier, so würde dein herumfahrender Finger auf dem Papiere bleibende Spuren seiner Bewegung zurücklassen, und diese wären Linien, nicht wahr? Was sind also Linien?

Zurückbleibende Bahnen einer vorübergegangenen Bewegung. Die Kreislinie also wäre die Bahn einer Bewegung, die sich in beständig gleicher Entfernung von einem Punkte hält.

§. 67.

So entsteht also jede Linie aus vorangegangener lebendiger Bewegung, und du kannst allerdings die Länge, Breite, Dicke und Tiefe durch Linien bezeichnen, die dein Finger in die Luft schreibt, weil dein Gedanke diese Linien festhalten kann, auch wenn sie dem Auge verschwunden sind. Nun aber, weil du zu wissen meinst, was die Linie sey, so will ich dich irre machen. Ich sage nämlich, jede Linie sey eine feste Gränze, und dieses Blatt Papier sey von vier geraden Linien begränzt oder eingeschlossen. Was willst du antworten? Du schweigst? Ich will für dich reden. Bitte mich nur, dir diese vier geraden Linien zu zeigen, frage mich nur, wo sie seyen. Dann werde ich auch schweigen oder gestehen müssen, sie seyen weder auf noch an dem Papiere, wenn ich nicht etwa das vierseitige Aufhören des Papiers mit meinem Auge verfolge, und in Gedanken Linien ziehe, wo das Papier aufhört. Du denkst dir zwar

die festen Gränzen als Linien, aber sie sind es nicht, und wenn auch immer der Zeichner ein Menschengesicht mit einer ovalen Linie einfaßt, so ist diese Linie keineswegs darin oder daran, sondern er zeichnet nur so, damit der Blick des Auges sich nach seinen Linien richte; er zeichnet eigentlich blos dem Auge seine Bahn vor, und giebt dem Blicke Richtung. Alle Linien sind also ursprünglich Bewegungsbahnen, und werden nur dadurch zu Gränzen, daß unser Auge das Aufhören der räumlichen Dinge in Linien aufzufassen genöthigt ist. Durch solches Auffassen der Dinge in begränzenden Linien entstehen uns Raumbilder, so wie uns durch die Entwicklung der Einheit in fortgesetzter Wiederholung des Gegensatzes und seiner Glieder Zeitbilder oder Zahlen entstehen. Die Zeit fassest du in Zahlen auf, den Raum in Linien.

§. 68.

Wie Zahlen aus der Eins erwachsen, weißst du; wie Linien aus Punkt und Kreis entstehen, ist zu untersuchen. Wenn der Raum zwischen Mittelpunkt und Kreis allseitig ausgefüllt ist, so hast du keine

Linie,

Linie, sondern eine Fläche, z. B. eine von Papier ausgeschnittene runde Scheibe, die dir oben und unten eine runde Fläche zeigt. Gieb mir aber einmal eine Fläche ohne alle Scheibe. Deine Scheibe von dem feinsten Postpapiere hat noch eine gewisse Dicke; laß diese weg, und gieb mir eine bloße Fläche. Dieß kannst du nicht; eben so wenig, als du Punkt und Linie ohne alle Breite geben kannst. Du hast also nun Punkt, Linie, Fläche alles im Raume, und doch nur wie angedeutet; der wahre Punkt, die wahre Linie, die wahre Fläche ist blos Gedanke; an den Dingen ist dieß alles so verwachsen mit einander, daß du keines ohne das andere dem Auge zeigen kannst.

Nun nimm die Fläche zwischen Punkt und Kreis. In ihr kannst du Linien ziehen vom Punkte nach dem Kreise und umgekehrt. Wie viele Linien sind hier möglich? unzählich viele. Und alle liegen in dieser Fläche, die demnach ein Inbegriff unendlich vieler möglicher Linien ist, wie die Eins oder Null ein solcher Inbegriff von Zahlen. Wie aber kannst du nun die Linien, die du hier etwa ziehen möchtest, unterscheiden? wohl durch nichts als durch ihre Richtung. Geht nun diese nicht vom Punkte aus, wenn du diesen als die erste Einheit aller Raumbilder betrachtest, und geht sie nicht nach dem Kreise? Vom

Punkte

Punkte geht alle Richtung aus, und im Kreise endet alle Richtung, und die Fläche ist alle diese Richtungen auf einmal, die Linie aber ist eine besonders herausgehobene Richtung. Wie nun diese Richtungen im Punkte alle Eins sind, so laufen sie gegen den Kreis zwar auseinander, er umschließt sie aber dennoch alle.

§. 69.

Nenne mir jetzt die erste unter allen Richtungen, so wie du mir die Zwei als die erste unter allen Zahlen nennen konntest!

Mir scheint, daß im Kreise keine Richtung die erste sey. Man kann vom Mittelpunkte aus nach allen Richtungen auf dieselbe Weise zum Kreise kommen.

Du hast recht, nur vergißest du, daß kein Kreis in der Welt allein steht, und wenn dieß nicht ist, so hat jeder Kreis, wie der, den du hier auf der Tafel siehst, die Worte des Raumes: oben, unten, rechts und links, in sich, und du mußt mit oben und unten, als dem ersten Gegensatze, anfangen. Zieh also aus dem Mittelpunkte eine Linie nach unten, bis sie im Kreise endet, so siehst du beim ersten Anblicke, daß diese Linie den Kreis nur zur Hälfte durchmißt,

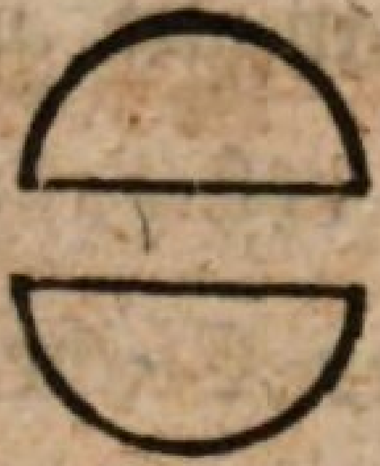
und

und daß sie mit einer entgegengesetzten ergänzt den Kreis erst ganz mißt. Auch hier also war der Schritt aus der Einheit (dem Punkte) heraus ein Gegensatz, dessen zwei Glieder sich ergänzen. Diese Linie, die den ganzen Kreis durchmißt, heißt nun Durchmesser, ihre Hälften heissen Halbmesser oder Strahlen, und wenn du den Worten des Raumes gehorchen willst, so mußt du nach dem ersten Durchmesser von oben nach unten noch einen andern zwischen rechts und links ziehen, und erhältst aus diesen Durchmessern eine Figur wie

das Kreutz im Kreise, ein dem genauesten Alterthume heiliges Bild. Warum denn heilig? weil es sichtbar vor Augen stellt, wie nach Gottes Weltordnung alle Einheit sich in den doppelten Gegensatz entwickelt, was du früher in den Zahlen: Eins, Zwei, Drei, Null, gesehen hast.

§. 70.

Diese beiden Durchmesser theilen den Kreis in zwei entgegengesetzte Hälften,

der eine so der andre so 

und in jeder dieser Hälften schließt sich der Durchmesser mit seinem Halbkreise zu einer völligen Begränzung des Raumes zwischen beiden. Solch ein Halbkreis mit seinem Durchmesser, der nun aber nicht mehr Durchmesser, sondern Sehne heißt, (weil er auf die Enden des Halbkreises als auf seinen Bogen gespannt ist), also wie der Kreis selbst ein geschlossenes Raumbild, nur ist er nicht wie dieser von einer einartigen Bildung. Du kannst auf kleinern Bogen als der Halbkreis auch kleinere Sehnen ziehen, der Halbkreis aber bleibt der größte Bogen und der Durchmesser die größte Sehne.

§. 71.

Der Doppelstrahl oder Durchmesser im Kreise ist also die erste Linie, und wenn er für den Halbkreis als Sehne genommen wird, so ist er auch die zweite Linie, er ist also beides. Willst du aber das, was er zugleich ist, getrennt anschauen, so ziehe im Kreise eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist, und richte auf die Endpunkte dieser Sehne Halbmesser oder Strahlen, welche bekanntlich Hälften des

Durch-

Durchmessers sind, so hast du in den Strahlen dieses Bildes

den innern Werth des Durchmessers, die Richtung von Innen nach Aussen, in der Sehne aber die entgegengesetzte Richtung, welche jener ersten Gränzen setzt. Beides liegt im Durchmesser vereint, und läßt sich in Strahlen und Sehnen getrennt darstellen. Ohne es zu wollen hast du hier schon ein Dreieck bilden müssen. So hattest du in der Zahl Zwei die Glieder des Gegensatzes; erwogst du aber, daß in ihrer Mitte die Einheit liegt, aus welcher der Gegensatz hervorgegangen, so hattest du mit der Zwei schon auch die Drei.

§. 72.

Wenn du von Linien im Kreise sprichst, so wirst du also künftig von Halbmessern und Sehnen sprechen, nicht mehr vom Durchmesser, in welchem beide noch Eins sind. Erwäge jetzt nur mit mir das Verhältniß dieser Linien. Zuvörderst siehst du den Gegensatz der Strahlen und der Sehnen, ein Gegensatz der Richtung, der sich wie Inneres und Aeusseres verhält, und wenn du künftig einmal auf die Gestalt der Dinge

besser achtest, so wirst du ihre Sehnen als Seiten finden, in denen sie platt gedrückt sind, und ihre Strahlen wirst du in Ecken oder Spitzen enden sehen, an welchen sie viel thätiger als an den Seitenflächen sind, so daß in den Strahlen das Streben, in den Sehnen aber, die Unterdrückung desselben sichtbar wird. Ferner erwäge das Verhältniß einer Sehne zu ihrem Bogen. Beides sind Linien, die in demselben Punkte anfangen und enden, wovon aber die Sehne als die kürzere Linie, blos durch ihren Anfangs- und Endpunkt, der Bogen aber auch durch sein Verhältniß zum Mittelpunkte bestimmt wird. Dieß ist der Unterschied des G e r a d e n und K r u m m e n in Linien; in Zahlen hattest du den Gegensatz des G e r a d e n und U n g e r a d e n.

§. 73.

Ich will dir jetzt eine Aufgabe stellen, an der du deinen Geist üben kannst. Wie ist das Gerade in Zahlen dem Geraden in Linien, und das Ungerade in Zahlen dem Krummen in Linien verwandt?

Das Gerade in Zahlen und in Linien wird einzig und allein durch den Gegensatz ohne die Einheit bestimmt; bei dem Ungeraden in Zahlen und dem Krummen in Linien zeigt sich aber die Einheit ebenfalls wirksam, und sie ist es die als einseitiges Glied die

ge-

gerade Zahl ungerade als Punkt aber die gerade Linie krumm macht.

Diese Antwort läßt mich nicht zweifeln, daß du nun auch das Wesen des Krummen bestimmt aussprechen kannst.

Ich halte die krumme Linie für ein Produkt aus der Richtung, die zwischen ihrem Anfangs- und Endpunkte liegt, und durch den Einfluß des Mittelpunktes beständig gestört wird. So beschreibt mein Zirkel mit dem einen Schenkel seitwärts gehend von dem andern Schenkel aber auf einen Punkt fixirt einen Bogen oder einen Kreis.

Welche Linie hältst du nun für die ursprüngliche, die gerade oder die krumme? Du zauderst zu antworten? Der Kreis ist selbst die erste Linie, und diese ist krumm; aber in jedem Kreise sind auch Strahlen, und diese sind gerade. Folglich ist das Gerade und das Krumme von gleichem Alter. Gerade Linien aber haben, wenn sie nicht im Kreise stehen, keinen Anfang und kein Ende, als den du ihnen willkührlich giebst, auch keine nothwendige Richtung. Willst du daher in der Wissenschaft der Raumbilder geordnet fortschreiten, so mußt du den Kreis voraussetzen, und alle geraden Linien nur im Kreise ziehen.

§. 74.

§. 74.

So sprich jetzt das Verhältniß eines Bogens und seiner Sehne bestimmt aus. Beide sind ja die einfachste Verbindung des Geraden und des Krummen. Auch haben beide die doppelte Bedeutung der Linie: Bahn und Gränze.

Versuchen will ichs. Da Boden und Sehne einerlei Endpunkte haben, so sind sie in der Richtung Eins, und der Bogen kommt mittelbar zu demselben Ziele, zu welchem die Sehne unmittelbar gelangt. Da ferner jede Sehne dem Mittelpunkte des Kreises näher liegt, als ihr Bogen, so ist jede Sehne mehr zusammengedrängte, jeder Bogen mehr erweiterte Gränze.

Gut. Die Sehne ist also die unmittelbare und zusammengedrängte Form ihres Bogens, und dieser ist die mittelbare und erweiterte Form seiner Sehne. Du hast deine Augen sehr gut aufgethan. Sehne und Bogen sind in der That nur zwei verschiedene Formen von dem Einen, was durch ihre gemeinschaftlichen Endpunkte angedeutet wird, nämlich von der Bewegung zwischen diesen Punkten.

§. 75.

Jetzt kehre wieder zu dem Bilde (§. 69) zurück, von welchem ausgehend wir diese Ansichten der Strahlen,

len, Sehnen und Bogen gefunden haben. Du siehst in diesem Bilde zwei Durchmesser sich schneiden, d. h. in einem Punkte Eins seyn, und von demselben aus sich wieder nach ihren eigenthümlichen Richtungen entfernen. So bilden sie ein Kreuz, in welchem demnach die Einheit und der Gegensatz zugleich klar ausgesprochen sind. Der Gegensatz der Arme des Kreutzes an dem Durchschnittspunkte heißt Winkel, und wenn du einen Winkel ausserhalb des Kreises setzest, so bleibt seine von dem Punkte abgekehrte Seite völlig offen, und der Winkel begränzt also den Raum blos von der Seite, wo seine Schenkel sich berühren. Neigst du die Schenkel näher gegeneinander, so wird ihre Entfernung, also ihr Winkel, kleiner; entfernst du sie, so wird der Winkel grösser, und diese Entfernung, bei welcher der eine Schenkel senkrecht (nach oben und unten), der andre wagrecht (nach rechts und links) steht, ist just die mittlere. Diese mittlere Entfernung heißt rechter Winkel, und wird zum Maaß genommen; was unter diese herabgeht, heißt spitzer, was über sie hinaufgeht stumpfer Winkel, und der stumpfe Winkel ist zusammen gesetzt aus einem rechten und einem spitzen.

§. 76.

Laß einen stumpfen Winkel immer wachsen, so werden seine beiden Schenkel, die im Kreise Strah-

len

len sind, endlich zu einem Durchmesser sich ergänzen; laß einen spitzen Winkel immer spitzer werden, so werden seine Schenkel endlich in einander fallen. In beiden Fällen ist kein Winkel mehr, und alle Winkel sind demnach blos mittlere Verhältnisse, welche die Halbmesser durchlaufen, wenn sie ihr Einsseyn im Durchmesser aufgegeben haben, und selbst untereinander noch nicht wieder Eins geworden sind. Vom Einsseyn im Durchmesser gehen alle Winkel aus, und durch verschiedene Neigungen der Halbmesser gegen einander durch, bis endlich die Halbmesser selbst in einander fallen. Was bestimmt nun rechte Winkel, und warum sind deren um einen Punkt herum oder in einem Kreise nur viere? Der erste Gegensatz (oben und unten) bestimmt einen Durchmesser, und die gleichmäßige Entfernung von seinen beiden Gliedern bestimmt den andern Durchmesser, und damit nicht mehr und nicht weniger als vier rechte Winkel. Von zwei Schenkeln eines rechten Winkels gehört daher der eine immer dem ersten, der andre dem Zweiten oder vermittelnden Gegensatze, und ein rechter Winkel heißt die gleichmäßige Vermittlung des ersten Gegensatzes durch den zweiten. Du siehst daher wohl, daß jeder rechte Winkel eigentlich nur ein Bruchstück aus dem Kreutze im Kreise, und jeder spitze Winkel ein Bruchstück eines rechten sey.

An-

Anmerkung. Der Lehrer muß an der Tafel alle Winkelverhältnisse vorzeichnen. Er fängt dabei vom senkrechten Durchmesser (oder dem Winkel von 180°) an, und durchläuft mit der zum Radius gemachten obern Hälfte des Durchmessers den Halbkreis, bis beide Halbmesser in der untern Hälfte des Durchmessers zusammenfallen. Die mittlere Entfernung dieses Umlaufs (Uebergangs) giebt dann den Winkel von 90°.

§. 77.

Was am Mittelpunkte des Kreises Winkel bildet, nämlich das Kreuz oder der vermittelte Gegensatz, das bezeichnet an dem Kreise Bogen, und du wirst bemerken, daß die Bogen mit den Winkeln wachsen oder abnehmen. Da wir nun die rechten Winkel als die ursprünglichen betrachten, so heissen wir auch die ihnen zugehörigen Bogen rechte Bogen (Quadranten), deren dann, wie der rechten Winkel, nicht mehr und nicht weniger als viere sind. Da der Kreis eine überall gleichförmige Linie ist, so hat man ihn zum Maaße der Winkel angenommen, und man mißt den Winkel nach dem Bogen, der ihm zukommt. Das Alterthum hat den Zeitumlauf des Jahres mit seinen 365 Tagen zum Maaßstaab der Kreismessung angenommen, dabei aber die 5 Epaktentage als für die Rechnung un-

unbequem herausgeworfen. So wird denn allgemein der Kreis durch die Zahl 360 gemessen, und ein solcher Theil des Kreises heißt ein Grad. Der rechte Winkel und der rechte Bogen haben demnach 90 Grade.

§. 78.

Welches ist nun das Verhältniß eines Bogens zu seinem Winkel, sieh einmal zu?

Der Bogen steht dem Winkel gegenüber und schließt ihn.

Das heißt wohl, der Bogen schließt den Raum von der einen Seite, den der Winkel von der andern schließt. Aber Winkel und Bogen schliessen auf ganz verschiedene Weise. Der Winkel schließt in einem Punkte zusammengedrängt, der Bogen schließt in einer Linie ausgebreitet, aber beide schliessen dasselbe ein. Wie aber, wenn ich nun durch eine Sehne, also eine gerade Linie, den Winkel schlösse?

So würde diese Sehne den Gegensatz der beiden Schenkel des Winkels unmittelbar zusammenfassen, der Bogen aber mittelbar, d. h. der Bogen würde zugleich den vollständigen Uebergang enthalten, den der eine Schenkel bis zu der Stellung des andern gemacht hätte, welchen Uebergang die Sehne abkürzt.

Da du so klar siehst, so kann ich jetzt wohl sagen: das Verhältniß des Winkels zu dem Bogen und der Sehne ist dieses, daß der Bogen den Gegensatz, der in dem Winkel erst entsteht, durch vollständigen, die Sehne aber durch abgekürzten Uebergang vereinigt. Jenes Entstehen des Gegensatzes ist im Raume ein Auseinandergehen der Linien, und dieses Vereinigen ist im Raume ein Schliessen, und auch der Winkel schließt, in so ferne die Linien in ihm zusammenlaufen. Die Sehne erscheint uns hier wieder wie vorhin (§. 74) als eine Abkürzung des Bogens.

§. 79.

Jetzt erst wirst du das Kreutz im Kreise mit seinen vier rechten Winkeln ganz zu schätzen wissen. Es enthält, wie du siehst, alles, was der Kreis enthält, nur auf umgekehrte Weise. Aus dem Kreutze gehen an seinem Durchschnittspunkte die vier großen Gegensätze hervor, die der Kreis umschließend zusammenfaßt. Nun achte aber auf die Linie, die stellvertretend für den Bogen einen rechten Winkel im Kreise zusammenfassen kann, die Sehne meyne ich. Diese ist, gleich den Schenkeln des Winkels eine gerade Linie, aber durch ihre Richtung höchst eigenthümlich. Wie nennst du diese Richtung, und was ist sie?

Schief nenne ich diese Richtung, die halb senkrecht und halb wagrecht ist.

Sie

Sie geht also in die Richtung der beiden Schenkel ein, doch nur zum Theile, so wie ein Vermittler zwischen Streitenden in die Ansicht des einen und des andern eingeht, ohne jedoch sich der einen oder andern Ansicht ganz hinzugeben, und eben dadurch gleicht er die streitenden Partheien aus. Diese Sehne oder schiefe Linie ist also eine wahre Vermittlerinn zwischen den Schenkeln des Winkels, und sie ist es durch ihre bloße Stellung, denn aus dieser herausgenommen ist sie nichts weiter als gerade Linie überhaupt; ihre Stellung bestimmt aber zugleich ihre Größe.

§. 80.

Ueberdenke nun den Reichthum an Linien und Winkeln, den wir bis jetzt gewonnen haben. Wir haben: Mittelpunkt, Kreis, Kreutz, Durchschnittspunkt, Durchmesser, Halbmesser, Sehne, Bogen, senkrechte, wagrechte, schiefe Linie, Urwinkel, rechter Winkel, spitzer und stumpfer Winkel. Urwinkel nenne ich nämlich den von 180 Graden, dessen Schenkel noch ohne Neigung sich zu Einem Durchmesser ergänzen. Willst du aus diesem Vorrathe die natürlichen Verhältnisse des Gegensatzes sichtbar herausgehoben an die Tafel zeichnen, so hast du:

Punkt		Mittelpunkt	
Strahl	Sehne	Längendurchm.	Querdurchm.
Kreis		Durchschnittspunkt.	

Spitze

Spitze	Punkt
Schenkel Schenkel	senkrecht wagrecht
Bogen	schief

Urwinkel

stumpfer spitzer

rechter Winkel

und dieses alles geht vom Punkte aus, endet im Kreise, und *mißt sich an diesem.*

Anmerkung. Der Lehrer muß diese Schemate mit dem Schüler wiederholt durcharbeiten, bis dieser klar einsieht, es sey hier gänzlich von *denselben* Construktionsverhältnissen die Rede, wie in den arithmetischen Schematen des §. 52. Namentlich stehen die beiden Schemate:

Punkt	Eins
Strahl Sehne	Zwei Drei
Kreis	Null

völlig einander gleich, und sind für die gesammte Mathematik die höchsten. Von ihrer Durchführung nach allen Seiten der Wissenschaft enthält Wagners *Staat* eine Menge Beispiele.

§. 81.

Wenn alles sich am Kreise mißt, so kannst du dich der Größe von Linien und Winkeln erst dann völlig versichern, wenn du sie in den Kreis einträgst.

Hier sind denn die vier Arme des Kreutzes allerdings die ersten Linien, die von dem Kreise gemessen werden, aber auch als Strahlen ihn wieder messen, und sich zu zwei Durchmessern ergänzen. Eben diese vier Arme des Kreutzes enthalten zugleich vier rechte Winkel, und wenn du dem Kreutze noch mehrere Arme giebst, wodurch es Stern wird von sechs, acht und mehr Strahlen, so werden durch diese neu gesetzten Strahlen die vier rechten Winkel dividirt, und diese kleineren Winkel haben kleinere Bogen, durch welche sie geschlossen werden. Die Division der rechten Winkel am Durchschnittspunkte des Kreutzes hält also völlig gleichen Schritt mit der Division des Kreises, der alle diese Winkel umschließt.

§. 82.

Um also der völlig gleichen Grösse zweier Linien versichert zu seyn, brauchst du sie nur als Durchmesser oder Halbmesser in einen oder denselben Kreis zu stellen. Linien haben ausser ihrer Grösse auch noch Richtung, und ich will dir zeigen, wie der Kreis auch diene, die Linien von Seite ihrer Richtung gleich zu stellen. Zeichne einen Kreis,

und

und ziehe in demselben in völlig gleicher Entfernung von seinem Mittelpunkte oben und unten eine wagrechte Sehne, so werden diese beiden Sehnen, welche gerade Linien sind, dieselbe Richtung haben, weil sie beide in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte gezogen und an ihren Endpunkten von gleichen Bogen getragen sind. Da aber eine gerade Linie schon durch ihre Endpunkte hinreichend bestimmt wird, so kannst du überzeugt seyn, daß zwei Linien gleichlaufend sind, wenn sie an beiden Enden von gleichen Bogen geschnitten werden. Es versteht sich, daß die gleichen Bogen zu demselben Kreise gehören müssen, daß es aber völlig gleichgültig sey, ob die gleichlaufenden Linien die senkrechte, wagrechte oder schiefe Richtung haben. Die Bogen messen hier, wie bei den Winkeln, die Entfernung der Linien von einander.

§. 83.

Es können also in jedem Kreise eine Menge gleichlaufender Sehnen nach allen seinen Richtungen gezogen werden, und jede zwei gerade Linien ausserhalb des Kreises können nach gleichen durch ihre Endpunkte gezogenen Bogen berichtigt werden, ob sie gleichlaufend sind oder nicht, und der Unterschied der Bogen

gen, von welchen sie am einen und am andern Ende geschnitten werden, giebt das Maaß für ihre Neigung gegen einander, falls sie nicht gleichlaufend wären. An die Stelle der gleichen Bogen, von welchen gleichlaufende Linien geschnitten werden, kannst du nun auch gleiche Sehnen setzen, und an die Stelle der Sehnen gerade Linien überhaupt, und so arbeiten sich diese Linienverhältnisse aus dem Kreise heraus, in welchem sie ihren Ursprung haben.

§. 84.

Aus diesem Ursprunge herausgerissen lassen sich die Linien beliebig verlängern und mit andern in Verhältniß setzen. Verlängerst du nun gleichlaufende Linien, so werden sie ihr erstes Verhältniß der gleichen Entfernung von einander stets beibehalten, weil die Verlängerung nur eine fortrückende Wiederholung ihres ersten Wesens ist. Bringst du aber gleichlaufende Linien mit einer dritten, nicht gleichlaufenden, in Verhältniß, so wird sich dieses Verhältniß durch Winkel aussprechen, und für beide gleichlaufende Linien dasselbe seyn, weil ja Winkel nur durch Richtung der Linien bestimmt werden. Hier ist aber die Richtung

bei-

beider Schwesterlinien dieselbe, und die dritte Linie ist für beide ebenfalls dieselbe.

Anmerkung. Der Lehrer wird hier den bekannten Satz: Parallellinien werden von jeder dritten Linie unter gleichen Winkeln geschnitten, auch an der Tafel anschaulich machen. Bewiesen zu werden braucht er nicht, denn er soll, wie alle mathematischen Sätze, seine Evidenz unmittelbar in seiner Darstellung haben, und die Beweise in den mathematischen Lehrbüchern beweisen eigentlich zuvörderst die Unfähigkeit der Mathematiker zu einer ächtmathematischen Darstellung.

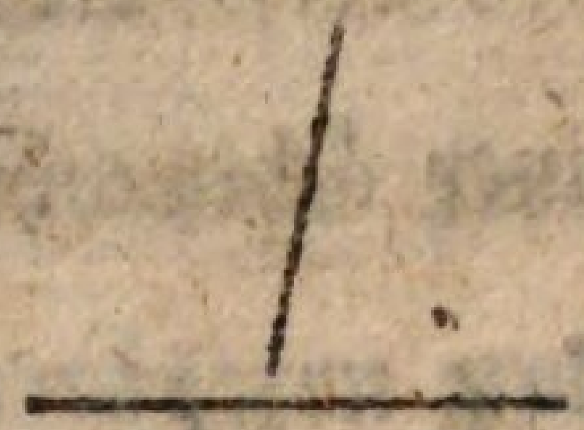
§. 85.

Wenn zwei Linien nicht gleichlaufend sind, also einen Gegensatz der Richtung haben, der bei ihrer Berührung sich als Winkel darstellt, so werden sie in dieser Berührung, der Spitze des Winkels als in einem Punkte gänzlich Eins. Wenn sie über diesen Punkt hinaus sich fortsetzen, also ihre erste Richtung verfolgen, so stellt sich damit auch ihr Gegensatz oder Winkel wieder her, und Scheitelwinkel sind also allerdings gleich groß, weil der eine nur die Wiederherstellung des andern ist. Der Punkt, wo beide Li-

nien sich kreuzten, scheidet das Ursprüngliche von seiner Wiederherstellung; in schon gezogenen Linien ist aber das Eine von dem Andern eben so wenig mehr zu unterscheiden, als in einem Produkte die Formzahl von der Inhaltszahl.

§. 86.

Wenn von zwei Linien, die gegen einander geneigt einen Winkel bilden, nur die eine über den Kreutzungspunkt hinaus fortgesetzt wird, z. B.

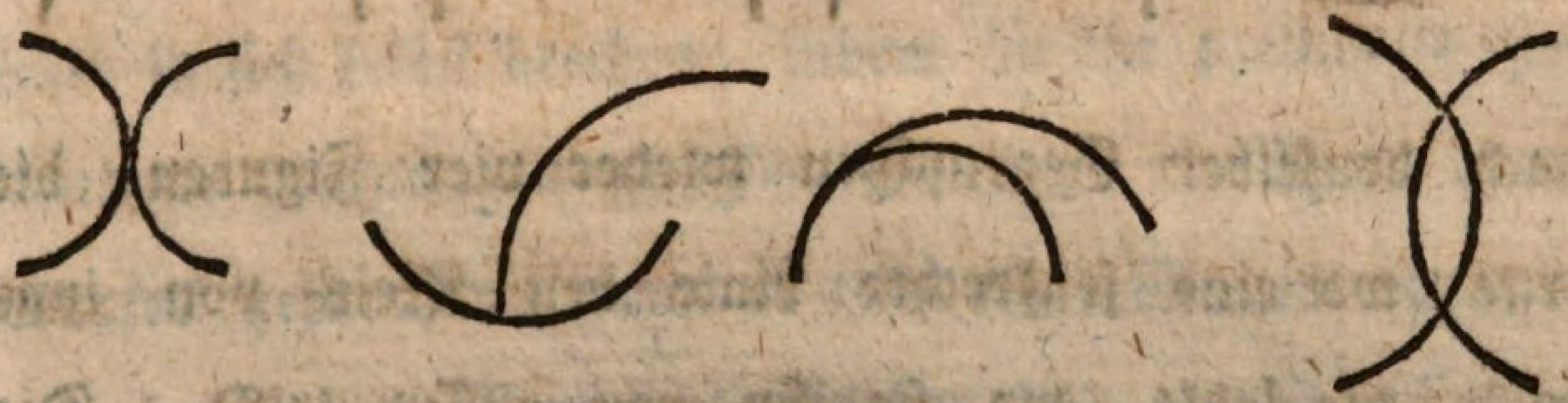


so entstehen Nebenwinkel, die nur, wenn sie rechte Winkel sind, gleichgroß, ausserdem aber zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind, weil der eine eben so viel abgenommen hat, als der andre gewachsen ist.

§. 87.

So hast du die Verhältnisse geradlinigter Winkel. Da du die Winkel blos als Gegensätze der Richtung begreifst, so wirst du auch bei krummen Linien Winkel setzen können. Aber welche? Sieh zuerst darauf,

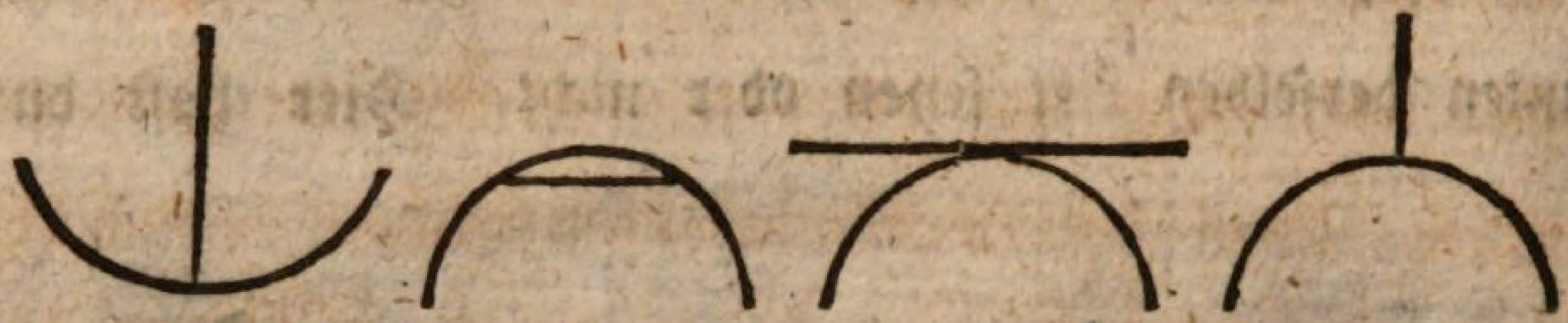
auf, welche Gegensätze in krummen Linien liegen. Ist eine krumme Linie nach aussen gewölbt (convex) nach inne hohl (concav), so können sich krumme Linien auch in dieser Art begegnen und Winkel bilden, wobei es dann nur noch eine Verschiedenheit darin giebt, ob beide Linien derselben Art seyen oder nicht. Hier hast du:



zwei äusserste und zwei mittlere gemischte Fälle, wie krumme Linien sich begegnen können. Die erste Figur zeigt zwei Kreise, die nur in Einem Punkte sich berühren können, weil jeder andere Punkt in ihnen von dieser Richtung der Berührung abweicht; die letzte Figur zeigt zwei Kreise, die in zwei Punkten sich schneiden, indem sie in einander eingedrungen sind, und die beiden andern Figuren zeigen Berührungen, wobei die eine Linie sich gewölbt, die andere sich hohl verhält, und die Berührung von inne oder von aussen geschieht. Diese vier Figuren enthalten alle Winkelformen krummer Linien.

§. 88.

Hast du nun die Winkel krummer und gerader Linien jede für sich erkannt, so setze eine Mischung und bilde daraus wieder Winkel. Hier hast du:



nach denselben Gegensätzen wieder vier Figuren, die erste, wo eine senkrechte Linie den Kreis von inne trifft, die letzte, wo sie ihn von aussen trifft. Die mittlern Figuren enthalten statt der senkrechten Linie eine wagrechte. Die Winkel, die auf diese Art entstehen, sind für alle gemischtlinigten Winkel die Grundformen.

§. 89.

Dieß sind die Winkel, die aus dem Gegensatze der Linien kommen. Sie haben gemeinschaftlich, daß in allen zwei Glieder (Schenkel) sind, deren Gegensatz im Berührungspunkte erlischt, von diesem aus aber sich immer stärker ausspricht, was räumlich als ein Auseinandergehen erscheint. Wie nun aber in der Zahlenlehre eine Zahl durch Multiplikation, wobei

sie

sie mit einer andern Zahl in den Gegensatz von Form und Inhalt geräth, nach aussen vermehrt werden, nach inne aber durch Division getheilt ins Kleine gebrochen werden kann; eben so ist es auch in den Raumbildern, und wenn du auf der einen Seite eine Linie durch Gegensatz ihrer Richtung mit einer andern in einen Winkel aufnehmen kannst, eben so kannst du auch die Linie in sich selbst brechen, indem du ihr theilweise verschiedene Richtungen giebst. So wird die Bahn eines Wurfes gebrochen, wenn er von einer Mauer abprellt, und da Linien überhaupt Bahnen sind, so sind sie der Brechung überall fähig, und gebrochen geben ihre Theile mit sich selbst Winkel. Du kannst daher jeden Winkel entweder als den Gegensatz zweier Linien oder zweier Theile Einer Linie betrachten; im letztern Falle wird dann der Winkel eine gebrochene Linie seyn.

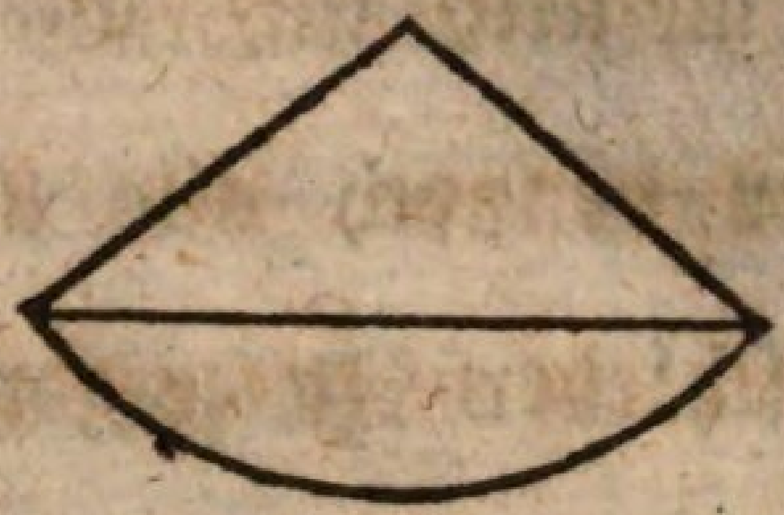
§. 90.

Soll eine Linie gebrochen werden, so sind die Punkte der Brechung Punkte des entstehenden Gegensatzes, so wie sie bei einem Winkel aus zwei Linien Punkte des aufgehobenen Gegensatzes sind.

Nun

Nun kann jede Linie in einen Kreis gestellt werden als Durchmesser, wo sie dann aus zwei Halbmessern besteht, die im Mittelpunkte des Kreises in einanderfliessen; für jede Linie ist also der Mittelpunkt der natürliche Anfang ihrer Gegensätze also auch ihr natürlicher Brechungspunkt, und jede Linie wird natürlicher Weise in einen Winkel von zwei gleichen Schenkeln gebrochen, der in seiner natürlichsten Form ein rechter Winkel zweier Strahlen im Kreise ist. So erscheint jetzt der Durchmesser in einen rechten Winkel verwandelt, welcher seine gebrochene Linie ist, und willst du diese gebrochene Linie so auf die ganze stellen, daß sie mit dieser einerlei Endpunkte habe, so mußst du die gebrochene Linie verlängern, weil durch die Brechung ihre Endpunkte einander näher gekommen sind; als sie in der ungebrochenen Linie waren. Jede gebrochene Linie, die mit einer ganzen gleiche Endpunkte hat, ist also länger als diese, und verhält sich in dieser Hinsicht zu ihr wie ein Bogen zu seiner Sehne, die mit ihm ebenfalls in einerlei Endpunkten befangen ist. Die ungebrochene Linie zwischen eine gebrochene und einen Bogen eingeschlossen

ist



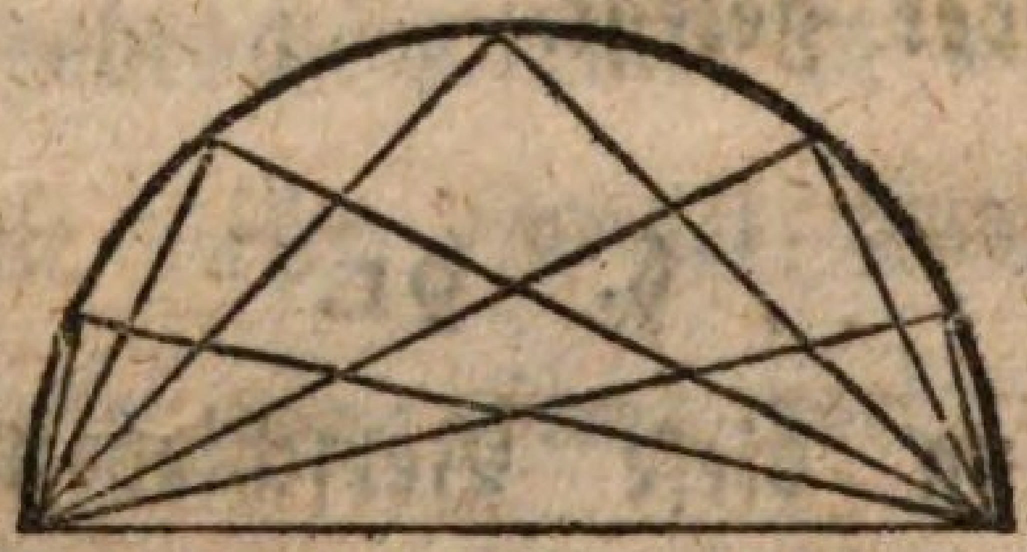
ist also die kürzeste Linie, und wenn nach unserer frühern Einsicht (§. 78) die Sehne eine Abkürzung ihres Bogens ist, so ist sie auch die Abkürzung einer gebrochenen Linie, die mit ihr gleiche Endpunkte hat. Die ganze oder ungebrochene Linie steht also in der natürlichen Mitte zwischen ihrem Winkel und ihrem Bogen, und in beiden erscheint sie auf verschiedene Weise auseinander gelegt.

§. 91.

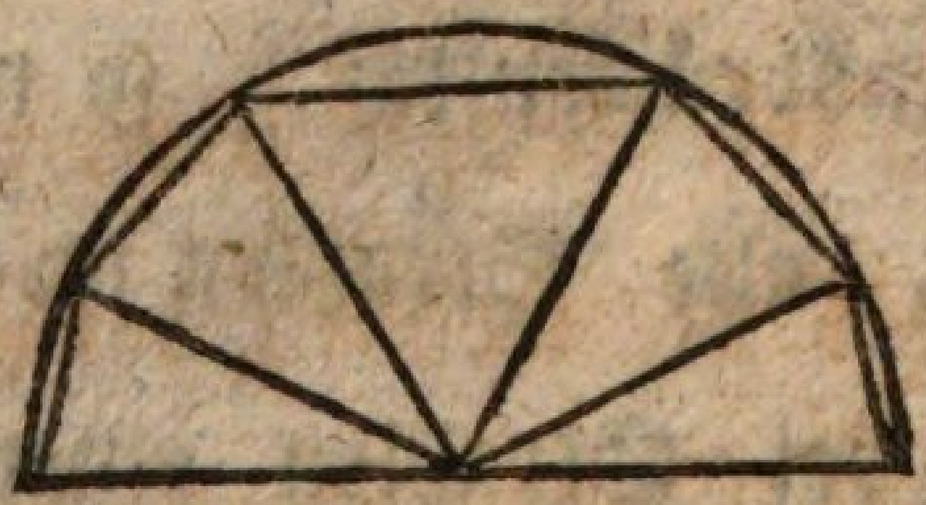
Sprich nun diese Verschiedenheit scharf aus. Du siehst, daß ein Winkel ein einfacher Gegensatz zweier Richtungen ist, der Bogen aber, in welchem die Strahlen nach allen aus dem Winkel kommenden Richtungen enden, die Gegensätze aller dieser Strahlen in sich begreift, also eine Linie von vielfachem Gegensatze ist. Da nun jeder Gegensatz von Linien sich als Winkel ausdrücken läßt, so würdest du, wenn es möglich wäre, alle Strahlen im Kreise zu ziehen, zwischen jeden zwei Strahlen einen Winkel haben.

Da

Da es aber nicht möglich ist, alle Strahlen zu ziehen, der Kreis aber dennoch alle umfaßt, ohne einen von dem andern geschieden zu zeigen, so umfaßt und verwischt er auch alle Winkel, die diese Strahlen miteinander bilden würden, und der Kreis ist also eine unendlich vielfach gebrochene Linie, dagegen der Winkel nur eine einfach gebrochene ist. Der Bogen einer Sehne zeigt also die Sehne in möglichst einfacher, ihr Winkel aber zeigt sie in einfacher Brechung, und wenn du mehrere Winkel über Einer Sehne errichtest



so wirst du selbst bemerken, wie du mit ihren Spitzen immer mehr dem Bogen dich näherst. Eben so, wenn du in einem Kreise mehrere Strahlen ziehst, giebt der Uebergang von dem einen zum andern eine Sehne, und diese Sehnen bilden unter sich Winkel

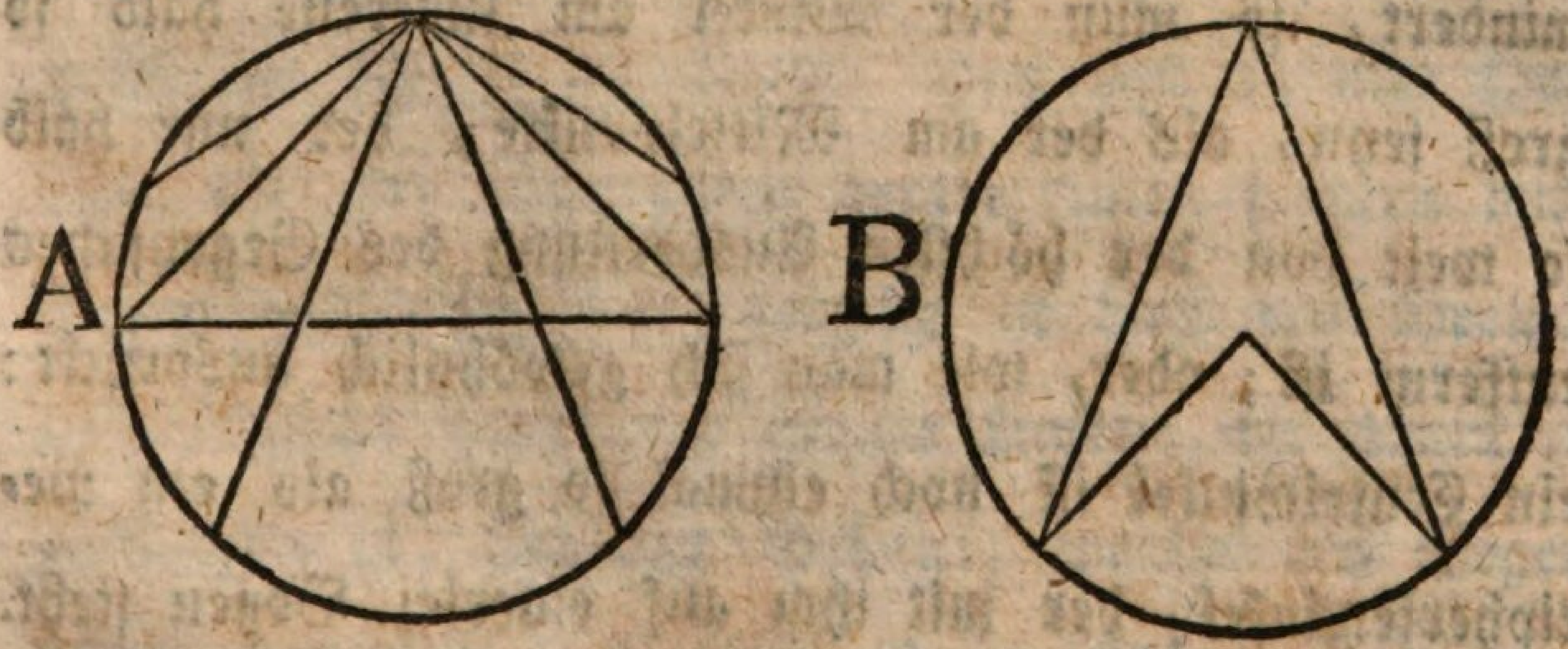


wel-

welche der Bogen alle vereinigt, und ausgleicht, indem er zwischen ihnen einen stätigen Uebergang macht. Im Bogen ist also eine stätige Brechung.

§. 92.

Wenn eine ganze Linie in einen Winkel gebrochen wird, so kannst du diese Brechung in zweifacher Ansicht auffassen, einmal, wie weit der Brechungspunkt von der ungebrochenen Linie entfernt sey, zweitens wie groß die Linie sey, welche gebrochen worden. Durch beide Ansichten wird die Grösse des Brechungswinkels bestimmt. Im Kreise kannst du auch hievon die klarste Anschauung erhalten. Zeichne:



In dem Bilde A siehst du drei Winkel am Umkreise, deren einer mit seinen Schenkeln auf einem Bogen unter dem Durchmesser, der zweite auf dem Halbkreise und dem Durchmesser, der dritte über

dem

dem Durchmesser steht. Der zweite ist also natürlich die Mittelform von Winkeln, unter welcher die Winkel abnehmen oder spitz werden, und über welcher die Winkel zunehmen oder stumpf werden, dieser zweite ist also ein rechter Winkel, und überhaupt alle Winkel, die auf dem Halbkreise stehen, sind rechte. Unter dem Halbkreise wird ihre Sehne kleiner, über dem Halbkreise fallen sie näher gegen ihre Sehne, und das Bild B zeigt dir zwei Winkel über demselben Bogen errichtet, aber in der Entfernung von diesem Bogen um einen ganzen Halbmesser verschieden. Da die Entfernung des Winkels von seiner Sehne oder seinem Bogen den Gegensatz seiner Schenkel vermindert, so muß der Winkel am Umkreise halb so groß seyn, als der am Mittelpunkte, der nur halb so weit von der höchsten Ausbreitung des Gegensatzes entfernt ist; oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt: ein Centriwinkel ist noch einmal so groß als ein Peripheriewinkel, der mit ihm auf einerlei Bogen steht.

Das Bild A sagt also: im Kreise wird der Durchmesser rechtwinklicht gebrochen; das Bild B sagt: eine Sehne wird am Umkreise noch einmal so stark als am Mittelpunkte gebrochen

§. 93.

§. 93.

Dieses wäre denn also das Verhältniß gebrochener Linien zu ganzen. Fassest du nun eine ganze Linie mit ihrer Brechung in einen Winkel zusammen, so hast du, was der Winkel für sich allein nicht giebt, einen völlig geschlossenen Raum, ein Raumbild. Merke nun zuerst darauf, daß in diesem Raumbilde, welches Dreieck heißt, ein Gegensatz oder Winkel vorkommt, der durch eine ihm gegenüberstehende Linie vereinigt ist.

§. 94.

Wo die Winkel entstehen, da müssen auch die Dreiecke entstehen. Gehe also zurück auf das rechtwinklichte Kreutz im Kreise. Hier hast du vier Dreiecke, die aber nicht durch gerade Linien sondern durch Bogen geschlossen sind; folglich ist dieß des Dreiecks ursprüngliche Form und gerade Linien, mit denen es geschlossen ist, sind nur Sehnen, welche des Bogens Stelle vertreten. Zugleich ist im Kreutze der durch den Bogen geschlossene Winkel ein rechter, und die Schenkel des Winkels sind gleich. Von dieser Urform des Dreiecks weicht das gemeine Dreieck ab, das an die Stelle des Bogens eine Sehne setzt, und

es

es können dann auch ohne Rücksicht auf Winkel die Seiten mit einander gleichgesetzt werden. So erhältst du also vier Formen des Dreiecks:

ursprünglich

gleichschenklicht   gleichseitig

rechtwinklicht

§. 95.

Erwäge zuförderst des Dreiecks ursprüngliche Form, wie sie rechtwinklicht, gleichschenklicht, vom Bogen geschlossen, im Kreise steht, und eben sowohl einen seiner vier rechten Winkel am Mittelpunkte als einen seiner vier rechten Bogen enthält. Dieses ursprüngliche Dreieck hat an seinem Bogen zwei gemischtlinigte Winkel und an seiner Spitze einen rechten; ziehst du mit den Schenkeln des Dreiecks und einer Linie aussen am Kreise ebenfalls rechte Winkel, so kannst du dich überzeugen, daß jeder dieser gemichtlinigten Winkel kleiner ist als ein rechter. Wie viel er aber kleiner sey als ein rechter, läßt sich nicht angeben, weil Krummes sich nicht auf Gerades zurückführen, d. h. messen läßt. Im Krummen sind die Winkel in einander geflossen, die bei geradlinigten Raumbildern bestimmt auseinander treten.

Nimm

Nimm das ursprüngliche Dreieck aus seinem Kreise heraus und stelle es für sich hin, so daß seine Einheit seiner Totalität gegenüber stehe:

so hast du hier den Bogen als die geschlossene Entwicklung des Punktes an der Spitze und die Schenkel des Winkels als den doppelten Uebergang zur Entwicklung. So steht also auch hier wieder geschrieben: alle Einheit gelangt durch doppelte Entwicklung zur Ganzheit.

§. 96.

Stelle jetzt das ursprüngliche Dreieck wieder an seinen Ort im Kreise, und ersetze seinen Bogen durch eine Sehne, so hast du das gemeine rechtwinklichte und gleichschenklichte Dreieck. Die Sehne, die du gezogen hast, ist nach unsern Begriffen (§. 79) eine schiefe Linie, also halb senkrecht halb wagrecht, indeß jeder der Schenkel des Dreiecks einseitig senkrecht oder einseitig wagrecht ist. Daraus folgt: 1) daß diese schiefe Linie grösser seyn muß als jeder der beiden Schen-

Schenkel einzeln, weil sie nicht blos der einfachen Richtung des Senkrechten oder Wagrechten folgt, kleiner aber als beide Schenkel zusammen, weil sie nur halb in ihre einzelnen Richtungen eingeht. Merke nun Worte. Diese schiefe Vermittlungslinie heißt Hypotenuse, die Schenkel heissen Katheten.

§. 97.

Die Katheten, jeder seiner einseitigen Richtung ganz hingegeben, bilden in ihrer Berührung einen rechten Winkel. Daraus folgt, daß die Hypotenuse, wo sie sich mit einem der Katheten berührt, mit ihm nur einen halben rechten Winkel bilden kann, weil sie ihm nur halb entgegengesetzt ist. Die beiden Winkel, welche in einem gleichschenklichten und rechtwinklichten Dreiecke an der Hypotenuse liegen, sind also jeder die Hälfte von dem Winkel an der Spitze, und dieses Dreieck enthält überhaupt zusammen zwei rechte Winkel in sich eingeschlossen.

Willst du nun überzeugt seyn, daß in jedem Dreiecke, wie es auch in Seiten und Winkeln von dem rechtwinklichten und gleichschenklichten abweichen möge, dennoch die drei Winkel zusammen zwei rechte ausmachen, so darfst du nur bedenken, daß bei den

Ver-

Veränderungen, die das Dreieck in Winkeln und Seiten erleiden kann, immer an einer Seite gewonnen wird, was an der andern verloren geht, die Summe der innern Verhältnisse also nothwendig dieselbe bleiben muß. Das rechtwinklichte und gleichschenklichte Dreieck ist aber für alle Dreiecke ohne Bogen die Grundform, und wenn du auch nur einen der Katheten länger oder kürzer machst als den andern, so ist, wenn auch der rechte Winkel bleibt, dennoch die Hypotenuse nicht mehr rein, weil Senkrechtes und Wagrechtes nicht mehr im Gleichgewichte sind. Die Gleichheit der beiden Winkel an der Hypotenuse gilt also nur für das gleichschenklichte Dreieck, aber für dieses gilt sie, auch wenn es nicht mehr rechtwinklicht wäre, die verbindende Linie also auch nicht mehr Hypotenuse; denn auch so würde die verbindende Linie, über welcher der gleichschenklichte Winkel errichtet worden, und die dann Grundlinie heißt, das Gleichgewicht des Senkrechten und Wagrechten zu verbinden haben, folglich sich zu beidem auf dieselbe Weise verhalten. Daher sagt man: gleichschenklichte Dreiecke haben an der Grundlinie zwei gleiche Winkel.

§. 98.

§. 98.

Nimmst du das Dreieck ganz für sich, ohne alle Erinnerung an seinen Ursprung aus dem Kreutze im Kreise, so erhältst du seine regelmäßigste Form, wenn du es gleichseitig setzest, wo es denn auch gleichwinklicht wird, weil Seiten und Winkel wie Gegensatz und Vereinigung von einander abhängen. Von dieser gleichseitigen Form aus kannst du sodann alle Verschiebungen desselben versuchen, und du wirst überall unvollkommene Gegensätze (Winkel) durch unvollkommene Linien (Seiten), volle Gegensätze (rechte Winkel) durch vollständige Vermittlung (Hypotenuse), große Gegensätze durch große Linien kleine durch kleine ververbunden finden. Aber auch dem gleichseitigen Dreieck, welches keinen rechten Winkel folglich auch keine Hypotenuse mehr hat, kannst du noch ein Verhältniß zu dem Kreise geben, wenn du den Strahl, der im rechtwinklichten Dreiecke ja doch die beiden Schenkel giebt, auch noch zur Sehne machst, das heißt, eine Sehne nimmst, die dem Strahle gleich sey. Dann besteht das ganze Dreieck aus der Linie, die im Kreise die erste ist.

§. 99.

Setze noch einmal das rechtwinklichte Dreieck mit seiner Hypotenuse, so sind die beiden an der letztern anliegenden Winkel zusammen dem rechten Winkel gleich. Verlängere nun irgend eine Seite des Dreiecks über das Dreieck selbst hinaus, so entsteht ein Aussenwinkel, der mit dem anliegenden innern, als seinem Nebenwinkel, zwei rechte Winkel ausmacht (§. 86.), folglich an die Stelle der beiden gegenüberstehenden Winkel des Dreiecks treten könnte, die mit diesem anliegenden auch zwei rechte Winkel machen. Daher sagt man, daß ein Aussenwinkel am Dreiecke so groß sey, als die beiden überliegenden innern Winkel zusammen. Da nun bei allen Dreiecken die Summe der drei Winkel dieselbe ist, so gilt auch dieser Satz von allen Dreiecken.

§. 100.

Verfolgst du den Gedanken, dem Dreiecke Aussenwinkel zu geben, nach allen Richtungen, so verliert sich endlich das Dreieck als geschlossenes Raumbild gänzlich, und du erhältst drei Linien, die sich in drei Punkten kreuzend begegnen. Eben so, wenn du jede Seite eines Dreiecks selbst zu einem Dreiecke ausbildest, verliert sich das erste einfache Dreieck in einem umgekehrten zusammengesetzten, und die Verlängerungen und Fortsetzungen von aussen tilgen überhaupt die erste

Figur aus. Ziehst du aber innerlich in dem Dreiecke Linien, so wird es dadurch dividirt, und wenn diese inneren Linien entweder den Seiten gleichlaufen, oder den rechten Winkel halbiren, so entstehen kleinere dem ersten ähnliche Dreiecke. Denn, was das letzte betrifft, so kann der rechte Winkel nicht halbirt werden, ohne daß gegenüber wieder rechte Winkel entstünden, wenn das Dreieck gleichschenklicht ist.

§. 101.

Betrachte nun das Dreieck noch einmal, ehe wir zu neuen Raumbildern übergehen. Es ist ein Ganzes, dessen drei Seiten sich in drei Gegensätzen begegnen, die als Winkel erscheinen, und zusammengehören, weil, wie das ursprüngliche Dreieck und selbst noch das rechtwinklichte zeigt, einer der erste ist, dem die beiden andern als seine Vertheilung gegenüber stehen. Bei dem gleichseitigen Dreiecke allein ist es nicht mehr sichtbar, welcher Winkel der ursprüngliche war, indem hier alle drei Winkel gleich unbedeutend geworden sind. Aehnlicher Art sind die drei Seiten des Dreiecks mit einander verwebt, indem eine die Vereinigung ist von dem Gegensatze, den die beiden andern miteinander gebildet haben. Bei dem rechtwinklichten Dreiecke ist nun dieses Verhältniß der Seiten aufs entschiedenste sichtbar, bei dem gleichseitigen ist aber auch das Verhältniß der Seiten

in Gleichgültigkeit übergegangen, und es ist blos ein allgemeines Exempel zu der Idee, daß alles Ganze aus Gegensatz uud Einheit bestehe. Uebrigens sind an jedem Dreiecke zwei Seiten zusammen größer als die dritte, weil diese dritte immer für den Gegensatz der beiden andern die Vermittlerin ist (§. 96.), und der Unterschied zweier Seiten ist immer kleiner als die dritte Seite, weil diese nebst dem Unterschiede ihrer Größe auch noch den Gegensatz ihrer Richtung auszugleichen hat.

§. 102.

Sind nun die Dreiecke selbst nichts als ein entwickelter und wieder geschlossener einfacher Gegensatz von Linien, d. h. geschlossene Winkel, und sind die Linien, von deren Gegensatz hier die Rede ist, nichts als die Richtungen der Länge und Breite, die im rechten Winkel ihr richtiges Verhältniß rein ausdrücken, so geben die Dreiecke, wenn sie nach ihrer Größe verglichen werden, die zweifache Ansicht der Länge und der Breite, und nach der Richtung, in welcher sie gleich sind, fallen sie allerdings zwischen zwei gleichlaufende Linien. Uebrigens aber ist der Gegensatz der Richtungen in den Dreiecken zwar geschlossen, aber auch verstümmelt, denn die vermittelnde Linie, wenn sie auch als Hypotenuse die reinste Vermittlerin ist, geht immer nur halb in das

Interesse ihrer Partheien ein, und ist zweideutig. Wenn daher ein Dreieck zwar Länge und Breite hat, so erfüllt es doch jede nur halb; denn an seiner Spitze, wo es die Höhe hat, fehlt ihm die Breite, und an seiner Grundlinie, wo es Breite hat, fehlt ihm die Höhe. Der Raum ist also durch dieses Raumbild offenbar nur zur Hälfte befriedigt, und es liegt in diesem Bilde die Unvollkommenheit der Zahl drei, welche auch eine Einheit und einen einfachen Gegensatz darbietet, ohne jedoch der Einheit etwas gegenüber zu stellen. Willst du aber die Zahl drei mit dem Dreiecke streng wissenschaftlich vergleichen, so mußst du sagen, daß jene eine Einheit und ein daraus hervorgegangener Gegensatz, dieses aber ein Gegensatz und seine Vereinigung sey. Der Punkt, aus welchem der Gegensatz im Dreiecke eigentlich hervorgegangen, war der Mittelpunkt des Kreises, und hat sich in der Spitze des Dreiecks verloren.

§. 103.

Wie nun die Zahl drei ihre Vervollständigung sucht in der Viere, so ist das Dreieck im Viereck, und wenn du die Grundform der Dreiecke, das rechtwinklichte und gleichschenklichte, setzest und mit einem entgegengesetzten verbindest, so erhältst du ein Viereck. Die verbindende Linie oder Hypotenuse wird hier unnütz, weil das Raumbild auf andere als solche unvollständige

Weise geschlossen wird, und so brauchst du von dem Dreiecke eigentlich nur den rechten Winkel mit seinen gleichen Schenkeln, um ein Viereck zu bilden. Du setzest dann dem rechten Winkel einen andern entgegen, und schliessest beide mit ihren Schenkeln an einander an. Jetzt hast du ein vollständiges Raumbild, in welchem, wie in der Zahl Viere, zwei Gegensätze mit einander zu Einem Ganzen verbunden sind.

§. 104.

In dem Dreiecke sind also die drei Punkte, die in jeder Linie liegen, zu drei Linien geworden, die sich eben so zu einander verhalten, wie die drei Punkte, von denen ja der mittlere der vereinigende des Gegensatzes der beiden andern war. Im Vierecke sind vier Linien, weil hier ein Gegensatz durch den andern gehalten ist, dagegen im Dreiecke die Einheit den Gegensatz hält, das Viereck aber ein Gegensatz von Gegensätzen ist, die einander im Gleichgewichte tragen. Dieses Gleichgewicht der Gegensätze giebt dem Vierecke theils rechte Winkel, theils gleichlange Seiten, und du wirst wahrnehmen, daß hierin das Viereck dem Kreise nichts nachgiebt. Was ist nun aber der Unterschied zwischen Kreis und Viereck, wenn doch beide dieses Gleichgewicht der Gegensätze haben? — Im Kreise fliessen diese Gegensätze ohne Winkel beständig in einander, im Vierecke

setzen

setzen sie sich mit aller Stärke in rechten Winkeln einander entgegen.

§. 105.

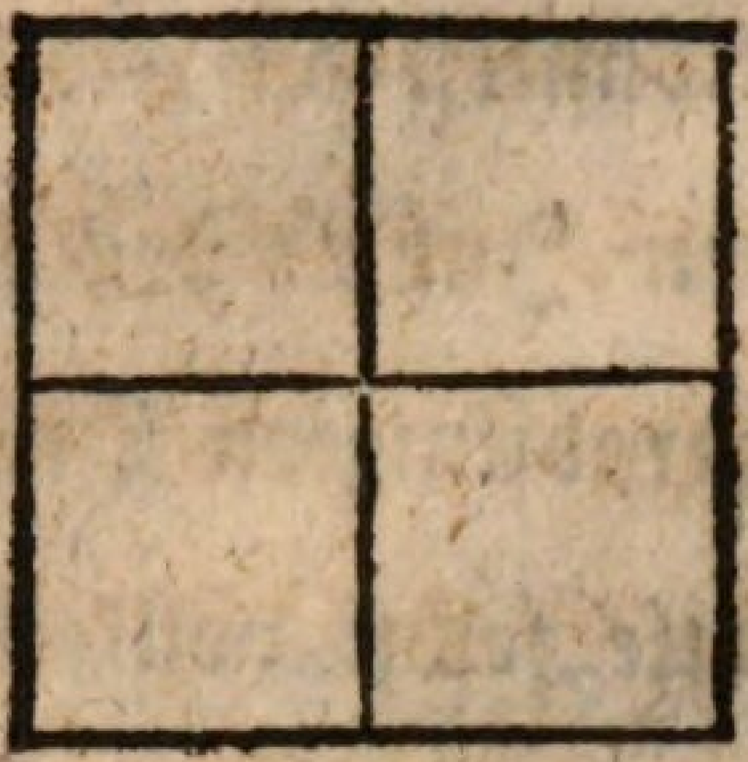
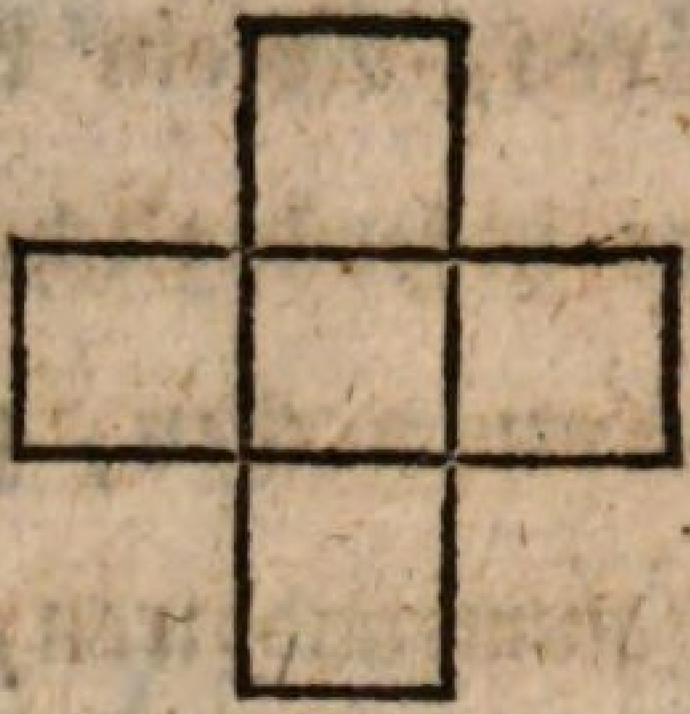
Das Viereck enthält offenbar zwei Dreiecke; um es mit Augen zu sehen, brauchst du nur dem ersten Dreiecke seine Hypotenuse zu lassen. Das Viereck ist also eine Summe von zwei Dreiecken, und wenn diese Summe vier rechte Winkel hat, so muß offenbar das Dreieck deren zwei haben, woraus du also von neuem einsiehest, daß die drei Winkel eines Dreiecks zusammen zweien rechten gleich sind. Wenn nun das Viereck die Summe zweier Dreiecke ist, so hast du hier ein Beispiel, daß Raumbilder sich wie Zahlen addiren oder subtrahiren lassen, und ich will dir hier noch eine andere Art zeigen, Dreiecke zu addiren. Sind sie nämlich in der Höhe gleich, so setze ihre Grundlinien zusammen, und ziehe dann über die zusammengesetzte Grundlinie die Vereinigungslinie, so hast du den Umfang beider Dreiecke in die Vereinigung aufgenommen; sind sie in der Grundlinie gleich, so setze ihre Höhen zusammen und verfahre dann wieder so. Auf diese Weise kannst du vier rechtwinklichte Dreiecke, die im Kreise um den Mittelpunkt herumliegen und alle den Halbmesser zur Höhe haben, zu einem einzigen Dreiecke zusammenaddiren, und wenn du gerade Linien zu machen wüßtest, die genau so lange

wären,

wären, als ein rechter Bogen, so könntest du selbst die vier ursprünglichen Dreiecke, die den Inhalt des Kreises ausmachen, zu einem einzigen geradlinigten Dreiecke zusammenaddiren, welches dem Kreise selbst vollkommen gleich wäre.

§. 106.

Wirst du nun Raumbilder, so wie du sie addiren und subtrahiren kannst, auch multipliciren und dividiren können? Was geschieht deiner Inhaltszahl im Multipliciren? Wird nicht jedes Element von ihr selbst eine Zahl? z. B. die Zahl 4 mit ihren vier Einzelheiten mit 6 multiplicirt, hat nun statt der vier Einzelnheiten vier Sechser, jede Einzelnheit ist also hier ein Sechser geworden. Nun sieh zu, ob du nicht an einem Vierecke jedes Element selbst wieder zum Vierecke bilden kannst. Was sind hier Elemente? Winkel und Seiten. Hältst du diese Elemente für völlig gleich, oder sind sie einander entgegengesetzt? Sie müssen entgegengesetzt seyn, wie alles, was sich unterscheiden läßt. Was wäre denn nun ihr Gegensatz? Winkel sind innerlich, Seiten äusserlich. Gut! So wäre denn für Raumbilder eine doppelte Multiplikation möglich. Zeige mir diese hier an der Tafel.

A  B 

A ist aus Winkeln also innerlich, B aus Seiten also äusserlich multiplizirt; in beiden Fällen aber sind die Elemente selbst Raumbilder geworden. Nun aber versuche es, diese Figuren durch Division auf ihre Elemente zurückzubringen. Wie wirst du hier verfahren? etwa wie jener Grieche, der die Seiten halbiren wollte? — Erinnere dich, daß die Vierecke Dreiecke zu Elementen haben, und trage also in alle Vierecke dieser beiden Figuren die Linie hinein, durch welche sie zu Dreiecken werden. Dies ist die Hypotenuse des Dreiecks, die schiefe Linie, welche in das Viereck hineingetragen D i a g o n a l e genannt wird; durch diese kommt jedes Viereck auf zwei Dreiecke, und wenn du die Diagonale im Gegensatze mit sich selbst wiederholst, das heißt, zwei Diagonalen sich durchkreuzend in das Viereck stellst,

so

so hast du die Division des Vierecks vollendet, und erhältst zum Quotienten vier Dreiecke, deren jedes eine Seite des Vierecks zur Hypotenuse hat, und diese Hypotenuse in einen rechtwinklichten und gleichschenklichten Gegensatz bricht. Die vier Winkel des Vierecks sind hier halbirt und die Seiten in rechte Winkel gebrochen, die Division war also hier völlig durchgreifend.

§. 107.

Diese Division des Vierecks lehrt dich ein neues Kreutz kennen, welches ebenfalls rechtwinklicht, wie das im Kreise, doch in Bedeutung und Stellung verschieden ist. Das Kreutz im Kreise steht auf seinen Linien und bestimmt die ursprüngliche Theilung des Kreises; das Kreutz im Vierecke steht auf seinen Winkeln und bestimmt die Zurückführung der Gegensätze des Vierecks auf einen Punkt, der dem Vierecke erst durch diese Zurückführung entsteht, dagegen der Mittelpunkt im Kreise so ursprünglich als dieser selbst ist. Jenes Kreutz ist also Entwicklungsform, dieses Zurückführungsform, und ich bitte dich zu erwägen, wie durch das Kreutz im Vierecke jede Seite, die doch ganze Linie zu seyn scheint, als Vereinigung eines Gegensatzes

oder

oder Winkels dargestellt wird. Zufolge dieser Ansicht kannst du also in jeder Linie ein Dreieck erblicken; sie giebt dir als Hypotenuse die Länge der Katheten und die Größe des Winkels, und mehr bedarfst du nicht zu einem Dreiecke.

§. 108.

Wenn jede Linie angesehen werden kann als Hypotenuse eines Dreiecks, so kann sie auch angesehen werden als Seite eines Vierecks, das vier solche Dreiecke enthält. Beides ist an der zuletzt gezeichneten Figur sichtbar. Daraus entwickelt sich also die doppelte Aufgabe, eine Linie zu dreiecken oder zu vierecken (trianguliren oder quadranguliren), und die erste dieser Aufgaben ist einerlei mit der früher schon ausgesprochenen Aufgabe: über jeder Linie eine gebrochene Linie zu errichten, d. h. jede Linie in einen Winkel zu brechen, welcher dann allerdings, wenn das Verfahren ganz regelmäßig von statten gehen soll, ein rechter Winkel seyn muß. Nun wirst du dich noch erinnern, daß eine Linie, die in einen Winkel gebrochen worden, auch in einen Bogen gebrochen werden kann (§. 90.), also Sehne ist, und du kannst nun zu den Seiten des

Vierecks auch die Bogen finden, wenn du die Arme des Kreutzes im Vierecke als Halbmesser nimmst, und mit diesen vom Durchschnittspunkte des Kreutzes aus einen Kreis ziehst. Da nun diese Seiten des Vierecks im Kreise Hypotenusen der Dreiecke desselben, also grösser als die Halbmesser sind, welche Schenkel dieser Dreiecke ausmachen, so erhellt, daß eine Sehne, die im Kreise ein Viereck giebt, immer größer ist als der Strahl dieses Kreises.

§. 109.

Hast du nun eine Linie gedreieckt oder geviereckt, so hast du die in ihr als Punkte gelegenen Gegensätze unvollständig oder vollständig entwickelt, das heißt, jedes Element, welches Punkt war, selber als Linie dargestellt. Wenn aber anfänglich nur drei Punkte in einer Linie liegen, welche einfach in Linien dargestellt ein Dreieck bilden, so kann der Theil einer Linie, der von zwei Punkten begränzt ist, nämlich ihre Hälfte, selbst wieder als Linie betrachtet und gedreieckt oder geviereckt werden, welches ohne Ende fortgehend gedacht werden kann. Du wirst also mit der Dreieckung oder Viereckung, überhaupt mit der Brechung einer einfachen geraden

raden Linie nicht einmal fertig, wenn du nicht bey dem ersten in ihr gefundenen Gegensatze stehen bleibst, denn jede neue Begränzung giebt neue Gegensätze. Wie nun, wenn ich dir die Aufgabe mache, den Kreis zu dreiecken oder zu vierecken? Verstehst du diese Aufgabe?

O ja, sehr gut! ich soll alle in dem Kreise liegenden Gegensätze der Richtung in Linien als Winkel darstellen, und diese sämmtlichen Winkel auf die Summe von zwei rechten (in einem Dreiecke), oder vier rechten (in einem Vierecke) zurückführen.

Schärfer hättest du die Quadratur des Zirkels — so nennt man diese Aufgabe — nicht aussprechen können. Wirst du aber auch diese Aufgabe lösen können?

Ich sehe sie durch das Kreutz im Kreise gelöst. Denn dieses enthält in seinen vier rechten Winkeln alles, was der Kreis in seinem Umfange einschließt.

Aber in jedem dieser vier rechten Winkel liegt eine Anzahl kleinerer, deren Vereinigungslinie im Kreise zu einer Sehne wird. Diese Sehnen bilden nun am Kreise, wie du weißt, Winkel mit einander, und ich ver-

verlange alle diese Winkel zu sehen, oder auch eine Linie zu sehen, die alle diese Sehnen zusammen enthält. Da diese Sehnen gerade Linien sind, so kann auch ihre Summe als gerade Linie dargestellt werden, und ich verlange nun, daß du mir eine gerade Linie gebest, welche die Summe aller in einem rechten Bogen möglichen Sehnen ist. Diese wird offenbar dem rechten Bogen selbst gleich seyn, und wir erhalten auf diese Weise ein Viereck, welches dem Kreise selbst gleich ist.

Dies ist unmöglich. Denn im Kreise hat jeder Punkt eine dem andern entgegengesetzte Richtung, und ist also, so zu sagen, selbst eine Sehne, und nur durch die Krümmung ist die Vereinigung so vieler Richtungen in Einer Linie möglich.

Sehr gut. Dies ist das Wesen des Krummen. Wenn du mir aber die Summe der Sehnen nicht angeben kannst, die in einen rechten Bogen fallen, so kannst du mir eben so wenig die Summe von Winkeln angeben, die in einen rechten Winkel fallen, denn jede Sehne am Bogen hat hier ihren entsprechenden Winkel.

Ich sehe das ein, und staune, daß weder der rechte Winkel noch sein Bogen gemessen werden kann;

nur

nur das, was zwischen beide fällt, kann nothdürftig gemessen werden.

Ist es in Zahlen besser? wie viel Brüche liegen in der Eins? wie viele Zahlen faßt die Null zusammen? Wie viele Brüche liegen zwischen jeden zwei Zahlen? z. B. $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. w. ist alle mehr als Zwei, aber doch noch nicht Drei. Im Gränzenlosen schwimmen alle Gränzen, und was du auf Raumbilder oder Zahlen bringen kannst, sind nur die mittlern Dinge, die aus dem gränzenlosen Leben hervorgehen, um wieder in ihm zu verschwinden.

§. 110.

Was hat aber das Viereck mit dem Kreise gemein? Das Gleichgewicht der Länge und der Breite. Doch will ich dir noch eine neue Verschiedenheit von beiden zeigen. Gieb beiden einen Durchschnitt, so ist er bei dem Vierecke in allen Höhen oder Breiten ganz derselbe, beim Kreise nimmt er ab und zu, und ist der größte in der Mitte. Dagegen sind im Kreise die Durchschnitte nach allen Richtungen gleich groß, wenn sie durch seinen Mittelpunkt treffen, indem sie dann alle Durchmesser sind. Wenn du das Viereck auf seine

Spitze

Spitze stellst, so sind seine Durchschnitte ebenfalls zu- oder abnehmend bis auf die Mitte, wie beim Kreise, und du kannst überhaupt bemerken, daß es gar nicht gleichgültig ist, wie das Viereck gestellt werde. Stellst du es auf seine Seite, so verräth es seinen Ursprung aus dem rechten Winkel; stellst du es auf seine Spitze, so zeigt es zwei mit ihrer Grundlinie in einander verwebte entgegengesetzte Dreiecke, so daß das Viereck also in seinen zwei verschiedenen Stellungen seinen zweifachen Ursprung zu erkennen giebt. — Noch Eins! Viereck und Kreis bleiben sich selbst in der Entstellung noch verwandt. Wenn du den Kreis nach Einer Richtung in die Länge oder Queere ziehst, so erhältst du ein länglicht rundes eiartiges (elliptisches) Raumbild, ganz dem Rechtecke entsprechend, in welchem du mit Beibehaltung der rechten Winkel zwei Seiten länger gemacht hast, als die beiden andern. Sehr schicklich kannst du auch in das länglicht runde Raumbild ein viereckigtes stellen, das auf einer seiner Spitzen steht, und statt der vier rechten Winkel zwei stumpfe und zwei spitze Winkel hat. Dieses Raumbild heißt dann Raute, und ist der natürliche Freund eines Kreises, der aus dem Gleichgewichte seiner Gegensätze gewichen ist.

§. 111.

§. 111.

Des Vierecks Wesen also besteht in der Gleichheit der Gegensätze, die in ihm sich unter einander einschränken, aber nicht wie beim Kreise ohne Einseitigkeit in einander fliessen. Es sey nun aus dem offenen rechten Winkel oder aus dem geschlossenen Dreiecke entstanden, so hat das Viereck immer die große Verschiedenheit vom Kreise, daß seine Gegensätze blos äusserlich (als Seiten) einander gleich, nicht aber innerlich durch eine Einheit zusammengehalten sind. Denn wenn du auch im Vierecke Diagonalen ziehst und dadurch einen Durchschnittspunkt erhältst, so ist doch dieser keineswegs wie beim Kreise ein ursprünglicher Einheitspunkt, und die Strahlen, die aus diesem Durchschnittspuukte im Vierecke nach seinen vier rechten Winkeln gehen, sind keineswegs den Seiten des Vierecks gleich. Nun bezeichnen diese Diagonalen, deren Hälften als des Vierecks Strahlen gelten können, gerade das Innere des Vierecks, dessen Aeusseres in seinen Seiten liegt; beim Vierecke ist also Inneres und Aeusseres noch ungleich.

§. 112.

Ich setze dir jetzt die Aufgabe, ein Raumbild zu suchen, in welchem das Aeussere dem Innern gleich sey. Wie willst du diese Aufgabe lösen? Geh nur wieder auf den Kreis zurück, der uns alles bisher gefundene finden ließ. Du weißst, die Seiten eines Raumbildes sind im Kreise Sehnen; unsere Aufgabe ist daher gelöst, wenn wir ein Raumbild finden, dessen Seite so groß ist als der Halbmesser oder Strahl des Kreises. Wie viele solcher Sehnen sind wohl im Kreise möglich? — — Nimm den Halbkreis mit seiner Sehne, dem Durchmesser. Wie lang ist dieser Durchmesser, der die Länge des Halbkreises macht? Zwei Halbmesser. Wie groß ist dann des Halbkreises Breite? Einen Halbmesser. — Der Halbkreis also enthält in Länge und Breite zusammen drei Halbmesser, der ganze Kreis wird also deren sechse enthalten müssen, wozu noch das dem Kreise eigenthümliche Krumme kommt, was nicht gemessen werden kann. Du wirst also in den Kreis ein Raumbild stellen können, dessen Seiten den Strahlen des Kreises gleich sind, und in diesem Sechsecke wird das Aeussere (die Seite) mit dem Innern (dem Strahle) im Gleichgewichte, und die sechs Seiten werden auch unter sich gleich seyn.

§. 113.

Linie, Winkel, Dreieck, Viereck, Sechseck — dieß war der Gang, den wir vom Kreise und seinem Punkte aus gegangen sind. Laß uns nun das letzte, was wir so eben gefunden haben, das Sechseck, das die Bienen in ihren Zellen bilden, in welchem der Basalt sich krystallisirt, und das Netz der thierischen Haut seine Zellen webt, noch schärfer ins Auge fassen. Es ist ein Raumbild, das ausser dem Gleichgewichte seiner Seiten auch noch das Gleichgewicht des Aeussern mit dem Innern zeigt, und, wenn du nach allen seinen Winkeln Strahlen ziehst, sechs Dreiecke darstellt, deren Seiten alle dem Strahl im Kreise gleich sind. Dieses Raumbild führt sich also von selbst auf das gleichseitige Dreieck zurück, so wie das Viereck seine Abkunft aus dem rechtwinklichten Dreiecke nicht verläugnet, auch sind die sechs gleichseitigen Dreiecke, in welche das Sechseck sich dividirt, recht schön um des Kreises Mittelpunkt herumgelagert, und dieser Mittelpunkt entsteht ihm nicht blos, wie dem Vierecke der Durchschnittspunkt seiner Diagonalen, sondern weil am Sechsecke alles Halbmesser ist, so ist es unter allen Raumbildern das am meisten dem Kreise verwandte, welches demnach zu des Kreises Mittelpunkte ein natürliches Verhältniß hat. Laß mich diese Verwandtschaft Centralität nennen, so sage ich, daß das Dreieck vom Centrum

aus

ausgehe, das Viereck sich ausser demselben ins Gleichgewicht setze, und das Sechseck durch seine Centralität sich wieder an denselben anschliesse.

§. 114.

Zeichne ein Sechseck mit seinen in ihm enthaltenen sechs gleichseitigen Dreiecken in den Kreis, und ziehe nun aus jedes Dreiecks Spitze am Mittelpunkte einen Strahl auf die Mitte seiner Sehne, so hast du jetzt zweierlei Strahlen, solche, die in die Spitzen des Sechsecks gehen und den Kreis berühren, und kürzere, die nur bis in die Seite des Sechsecks gehen. Was meinst du von dem Verhältnisse dieser beiden Strahlen? Gehören nicht beide dem Sechsecke? Aber die ersten hat es mit dem Kreise, die letztern hat es ganz für sich; du siehst hier also eine doppelte Natur des Sechsecks, seine gemeinschaftliche und allgemeine ausgedrückt durch Strahlen, die es mit dem Ursprunge aller Raumbilder, dem Kreise, verbinden, und seine eigenthümliche Natur ausgedrückt durch Strahlen, die durch seine Seiten sich begränzen. Fast möchte ich dich fragen, ob nicht in allen Dingen eine solche doppelte, allgemeine und eigenthümliche, Natur sey.

 §. 115.

§. 115.

Wenn im gleichseitigen Dreiecke die Winkel alle gleich sind, wie es wegen Gleichheit der Seiten seyn muß, wie groß ist Einer dieser Winkel? Sechzig Grade. Dieses Drittheil von der Summe aller Winkel eines Dreiecks ist gerade auch das Drittheil von dem Urwinkel, mit welchem wir die Entwicklung der Winkel anfiengen, und der noch kein Winkel ist, weil seine Schenkel noch in Einer Linie verwachsen sind. Jedes Dreieck also schließt in der Summe seiner Winkel ein, was jener Urwinkel noch offen zeigt.

§. 116.

Erinnere dich des Vierecks noch einmal. Im Vierecke war der Gegensatz von oben und unten vermittelt durch den Gegensatz von rechts und links, und es war hier, wie bei allem, was die Vierzahl hat, ein erster Gegensatz vermittelt durch einen zweiten, und zwischen den Gliedern beider Gegensätze lag der rechte Winkel. Denke nur an das Kreutz im Kreise, durch dessen Sehnen sich das erste Viereck im Kreise bildet. Im Sechsecke aber hast du kleinere Sehnen und kleinere Winkel, die Glieder der Gegensätze also werden

sich

sich näher seyn, als im Vierecke, und du erhältst im Sechsecke einen ersten Gegensatz (oben und unten), der durch einen doppelten Gegensatz rechts und links vermittelt ist. So erscheinen z. B. die Pole der Erde im Vierecke und dann im Sechsecke gestellt, so:

	N				N	
W		O		NW		NO
	S			SW		SO
					S	

und du siehst hieraus die allgemeine Idee des Sechsecks: *doppelte Vermittlung eines ersten Gegensatzes*. Daß dadurch die Entfernungen der Glieder nicht nur kleiner werden, sondern die Glieder selbst auch in *gleiche* Entfernungen zu einander kommen müssen, erhellt daraus, weil der erste Gegensatz überall den *Inhalt* zu seinen Entwicklungen giebt, diese Entwicklungen aber eben seine Vermittlungen sind. Nun war der erste Gegensatz ein *Paar* von Gliedern, er kommt also erst durch ein *Paar* Vermittlungen mit sich selbst ins Gleichgewicht. Form (Vermittlung) und Inhalt (Gegensatz) sind hier also einander eben so gleich geworden, wie in dem räumlich verzeichneten Sechsecke die Sehne und der Strahl.

Anmerkung. Die Gleichheit von Strahl und Sehne im Sechseck ist Gleichheit dessen, was man in der Philosophie das Subjektive und das Objektive nennt. Man merke aber, daß im Sechsecke, wenn es in Ideen gedacht und nicht im Raume verzeichnet wird, jenes Subjektive im Inhalte, dieses Objektive in der Form liege.

§. 117.

Zweimal drei ist sechs; dreimal zwei ist sechs. Gerade ist zwei, ungerade ist drei, und eben diese zwei einzigen Zahlen treffen im Sechsecke zusammen. Du nennst sie mit Recht die einzigen Zahlen, denn alle übrigen sind blosse Wiederholungen von diesen. Eben so sind Halbmesser und Sehne, aus deren Gleichheit das Sechseck kommt, die einzigen Linien, und sind im Durchmesser noch beisammen. Du siehst also im Sechsecke ein Raumbild, in welchem die zwei einzigen Zahlen mit den zwei einzigen Linien zusammentreffen.

§. 118.

Lag aber zwischen Viereck und Sechseck nicht das Fünfeck? und liegen in diesem nicht auch die beiden Zahlen, wiewohl ohne innere Durchdringung blos additions-

ditionsweise? Was ist das Fünfeck? — Das Viereck liegt zum Grunde. Eine Seite desselben ist gebrochen worden, die gegenüberstehende ist ganz geblieben. Beim Sechseck waren zwei gegenüberstehende Seiten des Vierecks gebrochen worden. Offenbar ist also das Fünfeck eine Uebergangsbildung, in welcher das Gleichgewicht der Gegensätze, wie es in dem Viereck ist, aufgehoben, aber noch kein Gleichgewicht der Entwicklung (Brechung) hergestellt ist. Denn das wirst du einsehen, daß die Brechung der Seiten bei Raumbildern dasselbe ist, was die Brechung der Einheit und Ganzheit in den Zahlen; beides ist Entwicklung. Das Fünfeck ist demnach ein Raumbild, zu dessen einseitiger Entwicklung in der Mitte noch eine andere ergänzende einseitige Entwicklung fehlt.

Anmerkung. Die Zahlen Fünf und Sechs, so wie die diesen Zahlen entsprechenden Polygone sind von der bestimmtesten Bedeutung in der physischen Natur. Drückt das einfache Gleichgewicht des Vierecks die Ruhe chemischer Neutralität in kubischen Krystallen aus, so liegt in der Sechszahl die doppelte mittlere Entwicklung des Thieres, d. h. sein vegetatives und sensibles System, die beide zwischen dem Starren und Aetherischen des Organismus in der Mitte stehen, und die

Fünfzahl bezeichnet die einseitig extensive Entwicklung der Pflanzenwelt, der es an einer gegenüberstehenden intensiven Entwicklung fehlt. Daher ist Fünfe die Grundzahl der Pflanzenwelt, Sechse die Grundzahl des Thiers, aber auch da, wo die Sechszahl noch in der mineralischen Welt erscheint, z. B. in den sechs Seiten des Würfels, ist sie Resultat einer Entwicklung, die zwischen den Gliedern des ersten Gegensatzes (oben und unten) eine zweifache mittlere Entwicklung (rechts und links, vorn und hinten) gefunden hat. Diese sechs Seiten des Würfels reduciren sich aber auf drei Durchmessungen des Raumes, die alle aus dem Punkte kommen, und den Raum vollenden. Angewandt auf die Construktion der Sphäre giebt dieß die drei Linien: Achse, Aequator, Meridian, in welchen die mathematische Geographie enthalten ist.

§. 119.

Bist du nun in Bildung der eckigten Raumbilder über das Dreieck hinausgegangen, so ist keine Gränze der Brechung mehr, und du kannst im Kreise Vielecke bilden von immer mehrern und kleinern Sehnen und Seiten, doch wird keines solche Eigenthümlichkeit mehr haben, wie die bisher entwickelten. Schreitest du aber

die Seiten brechend fort, so werden die kleiner werdenden Sehnen dem Kreise immer näher kommen, und die Ecken ihn in immer mehrern Punkten berühren. Welches Vieleck aber wird mit dem Kreise ganz zusammenfallen?

§. 120.

Für jede Sehne im Kreise ist ausser ihm eine gleichlaufende Berührungslinie möglich, und diese Tangenten mit ihren entgegengesetzten Richtungen geben auch Winkel, wie die Sehnen. Diese Tangenten immer kleinere und mehrere gesetzt, schliessen sich als Vieleck von aussen an den Kreis an, und kommen ihm näher und näher. Der Kreis also kann gesehen werden zwischen einem innern und einem äussern Vieleck eingeschlossen, welche beide sich ihm immer nähern; er selbst bleibt aber von beiden streng geschieden, so lange sie noch ihre Winkel nicht zu blossen Punkten in einander fliessen lassen.

Viertes Buch.

Bewegungslehre.

§. 121.

Erinnerst du dich noch, daß jedes Ding Natur und Geschichte hat? Was ist seine Natur? — der Inhalt, den es zu entwickeln hat. Was ist seine Geschichte? Eben die Entwicklung dieses Inhaltes? — Wie entwickelt es diesen? Nach und nach in der Zeit. — Wie legt es den entwickelten auseinander? In den Gegensätzen des Raumes. — Was ist das Alles, was so in Raum und Zeit, Geschichte und Natur, mit sich selber zu spielen scheint? Leben ist es. — Gleiches Leben überall? Nein; in Mineral und Pflanze blos entwickelnd, in Thier und Mensch auch seine eigene Entwicklung fühlend. — Thun wir aber jetzt nicht wirklich mehr als blos uns selber fühlen? Ja, wir erkennen. — So ist es also dem Menschen gegeben, seine eigene Entwicklung nicht blos wie das Thier zu fühlen, sondern auch zu erkennen, und von den vier Stufen: Mineral, Pflanze, Thier, Mensch, ist

jede merklich über die andere emporgehoben. Vermöchtest du ihre Unterschiede scharf anzugeben? Ich getraue mir nicht. — Der Stein ist, die Pflanze ist und wächst, das Thier wächst und fühlt; der Mensch fühlt und erkennt; der Mensch also erkennt, fühlt, wächst und ist, so daß in ihm der Inhalt aller vier Stufen sich vereinigt.

§. 122.

Eins, Zwei, Drei, Null! was war das? Zahlen. Multiplikation, Division, Addition, Subtraktion — was war das? Verfahrungsarten mit den Zahlen, Rechnungsarten. Kannst du willkührlich mit den Zahlen verfahren? Kannst du sagen: zweimal drei sey achte? Nein. Warum nicht? Die Zahlenprozesse hängen von der Natur der Zahlen ab, und was die Faktoren nicht im Keime hatten, kann auch nach ihrem Entwicklungsprozesse nicht im Produkt erscheinen. Was hatten aber die Zahlen im Keime? Die Einheit, welche jede Zahl bis auf einen gewissen Grad gebrochen zeigte. So wären ja die Zahlen alle Brüche? Das sind sie, und giebt man ihnen Zähler, so werden sie auch für gemeine Brüche anerkannt. — Und welcher Gegensatz geht fort durch alle Zahlen? Gerade und ungerade sind sie alle.

§. 123.

Vom Punkt zum Kreise führt ein leichter Weg. Tagtäglich geht diesen Weg das Licht, und ist selbst dieser Weg, Halbmesser, Strahl. Zur Seite streifen diesen Weg die Sphären, die mit dem Lichte sich berühren und doch eigne Wege gehen. Was sind das, diese Wege, Bahnen, Richtungen? Ausbrüche des Lebens dahin, dorthin. Mach Linien daraus, mach einen Punkt, von welchem diese Linien ausgehen, einen Bogen, der sie alle auffängt. Hier stehen diese Linien an der Tafel! Mittelpunkt, Strahl, Sehne, Kreis. Was sind das? Ausströmungen und Gränzen sinnlich hingemahlt, um jene Richtungen des Lebens klar zu denken. Was ist die Länge? Eine Richtung, und zwar die erste. Was ist die Breite? eine andre Richtung, und zwar die zweite. Was ist der Punkt? Der Anfang aller Richtungen noch ohne Richtung. Nun zeichne mir einen Punkt, an welchem gar keine Ausdehnung sichtbar sey, eine Linie, die nur Länge, nicht Breite habe. Du kannst nicht? Gieb mir eine Breite ohne alle Dicke, eine reine Fläche. Du kannst nicht? — So kannst du ja eigentlich deine Gedanken von Punkten, Linien und Flächen für das Auge blos andeuten, nicht wirklich ausdrücken, weil die Wirklichkeit überall in einander verwebt, was dein Gedanke trennt. Wenn also deine Linien sich in Winkeln schneiden,

wenn

wenn deine Winkel geschlossen zu Dreiecken werden, wenn deine Dreiecke in Vierecke verwandelt als vollständige Raumbilder dastehen und dann als Sechsecke kreisartig einen Mittelpunkt gewinnen; so ist dieß alles nur unvollkommene Andeutung von Verhältnissen, die dein Gedanke scharf auffassen und getrennt halten kann, die aber in der sinnlichen Darstellung in einander fliessen. Ich will dir ein Räthsel sagen. Das Denken ist viereckigt, das Leben rund. Verstehst du das?

§. 124.

Inzwischen rührt sich doch das Leben in diesen Linien, als seinen Gränzen und Bahnen, und eine Kugel ist wie von einer Kreislinie begränzt, obgleich nirgends eine solche Linie um sie gezogen ist, und wenn sie auf einem Tische fortrollt, so kannst du ihren Weg als eine Linie bezeichnen, obgleich sie keine Linie hinter sich zurückläßt. Hast du nun bisher die Verhältnisse dieser Linien gegen einander kennen gelernt, so achte jetzt darauf, wie diese Verhältnisse gegen einander sich ändern können, wenn das an sie gebundene Leben sich ändert. Diese Verhältnisse sind räumlich, das an sie gebundene Leben zeitlich, die Aenderung dieser Verhältnisse des Raumes durch die zeitliche Veränderung des Lebens in ihnen heißt Bewegung.

§. 125.

Was hast du jetzt in dem Gedanken von Bewegung zusammengefaßt? Zeit, Raum, Veränderung. — Sprich bestimmter. Du hast gefaßt das Ding, dessen zeitliches Leben die Verhältnisse des Raumes ändert, also: Ding, Zeit, Raum und Veränderung des Lebens in ihnen. Wenn sich das Leben in den Dingen rührt, so verändert es ihre Raumverhältnisse, z. B. du läufst oder springst. Nun sieh aber zu, in welchen Formen sich das Leben rühren kann? Offenbar in denen, in welchen es gebunden ist, also gerade in den Formen der Linien und Winkel. Womit haben nun diese angefangen? Mit dem Punkte und dem Kreise. Gut! so bedenke zuförderst diese.

§. 126.

Also ein reiner Punkt ist ein blosser Gedanke. Sieh aber zu, ob nicht dieser Gedanke in den Dingen auf irgend eine Weise wirklich geworden sey. Es giebt bekanntlich eine Ferne, in welcher alle Dinge nur als Punkte gesehen werden. Seifenblasen sind voll Luft, und dennoch ist ihre ganze Gestalt um einen unsichtbaren innern Mittelpunkt gewölbt. Die Magnetnadel zeigt in ihrem mittlern Punkte keine Pole, auch liegt sie auf ihrem mittlern Punkte im Gleichgewichte. So zeigt sich also der Punkt in den Dingen auf verschiedene Weise.

§. 127.

Was geht im Kreise von dem Punkte aus? Halbmesser, Strahl. Was geht im Kreise nach dem Mittelpunkte zu? Halbmesser, Strahl. Die Strahlen haben also eine doppelte Bedeutung, herauswärts und hineinwärts. Denke nun, daß der Mittelpunkt des Kreises in allen Strahlen sich nach aussen ergießt, so wird er sich zum Kreis erweitern; denke umgekehrt, daß der Kreis in allen Strahlen sich dem Mittelpunkte nähert, so wird er sich zum Punkte verengern. Hier hast du die zwei ersten Formen der Bewegung: Ausdehnung und Zusammenziehung.

§. 128.

Mit ihnen zugleich hast du den Gegensatz, der, wie du weißst, überall eintritt, wo die Einheit sich bricht oder aufschließt. Was war denn hier die Einheit? Der Punkt. Was war der Gegensatz? Die beiden Richtungen des Strahls. Was wurde der Punkt in den Strahl sich ergiessend? Kreis. Was wurde der Kreis nach den Richtungen des Strahls sich zusammenziehend? Punkt. Wenn nun im Strahle die doppelte Bewegung ist, was ist im Punkte? Keine Bewegung,

gung, weil noch keine Richtung in ihm ist. Keine Bewegung aber ist Ruhe, der Punkt ist also Ruhepunkt. Was ist aber im Kreise, wo alle Richtungen zusammentreffen? Allheit der Bewegung, höchste Unruhe.

Anmerkung. Weil aus des Lebens Unruhe seine einzelnen Produkte hervorgehen, so muß die Oberfläche einer Sphäre voll von Geschöpfen seyn, ihr Inneres aber nach der Tiefe einfacher und todter werden.

§. 129.

Der Strahl im Kreise also lehrt dich Ausdehnung und Zusammenziehung, der Punkt Ruhe, der Umkreis ein Gewühl von Bewegungen. Setze nun eine Kugel, in welcher die Erweiterung von innen heraus wohl versucht werde, aber nicht von statten gehe, so wirst du diese Versuche zu Bewegungen ein Streben nennen, und das Leben, welches in solchem Streben begriffen ist, eine Kraft. Wie viel sind solcher Kräfte in der Welt? So viele, als verschiedene Richtungen sind, in welchen sich das Leben befangen finden kann. Was sind all diese Kräfte? Das Eine Leben.

§. 130.

Am Gegensatze messen sich die Kräfte. Siehst du eine Kugel kleiner werden, so erkennst du darin das Uebergewicht ihrer Zusammenziehung; wird sie größer, so überwiegt ihre Ausdehnung. Suche mir aber diesen Gegensatz noch näher zu bestimmen. Wenn zwei Kugeln neben einander sich ausdehnen, und die eine in kurzer Zeit zu einer Ausdehnung gelangt, zu welcher die andere längere Zeit bedarf, so wirst du urtheilen, daß in der ersten die ausdehnende Kraft größer sey als in der zweiten. Wie nennst du nun eine Bewegung, die in kurzer Zeit durch einen weiten Raum sich ausdehnt, im Gegensatze mit einer andern, die sich in langer Zeit nur durch einen kleinen Raum verbreitet? Jene Kraft ist offenbar die schnellere. So wird Geschwindigkeit nach Raum und Zeit gemessen,

weiter Raum in kurzer Zeit
kleiner Raum in langer Zeit,

und schnell und langsam sind die Gegensätze, die in der Geschwindigkeit der Bewegung liegen.

§. 131.

Nun merke, daß du an jedem Dinge nur so viel Bewegung wahrnimmst, als in ihm die Ausdehnung oder die Zusammenziehung überwiegt; wenn beide sich das Gleichgewicht halten, so füllt das Ding seinen Raum mit gleichförmiger Erscheinung aus, und hängt in sich zusammen. Mit diesem Zusammenhange, bei welchem seine Ausdehnung durch seine Zusammenziehung eingeschränkt ist, widersteht es lange deinen Versuchen, es zu zerreissen oder zu zerbrechen, und behauptet sich kräftig als ein einzelnes Ding. Du weißst, daß diese Kraft der Cohäsion in verschiedenen Dingen, z. B. Glas, Eisen, Wachs ꝛc. von verschiedener Stärke ist; aber immer ist es eine Kraft, mit der das Ding sich in sich selbst zusammenhält.

§. 132.

Laß nun die Ruhe der Cohäsion gestört werden durch Ausdehnung, so wird das Ding wie ein Wassertropfen, der verdunstet, ganz auseinander gehen, ohne mehr feste Gränzen im Raume zu behaupten; laß die Ruhe der Cohäsion gestört werden durch Uebergewicht der Zusammenziehung, so wird der Umfang des Dings

(Volum) zusammenschrumpfen, und es würde bei einem gränzenlosen Uebergewichte der Zusammenziehung zum bloßen Punkte kommen. — Kennst du nun etwas, das überall ausdehnend wirkt? Die Wärme. Kennst du etwas, das überall zusammenziehend wirkt? Die Kälte. — So hättest du ja die Wärme als Ausdehnung in der Natur wirkend in Strahlen von inne heraus, wie das Licht, und die Kälte als Zusammenziehung in der Natur, wirkend in umgekehrten Strahlen, die von aussen nach dem Mittelpunkte gehen, und jedes Ding wäre in einem Mittelzustand von Wärme und Kälte (Temperatur), aus welchem es auf die eine oder die andere Art getrieben werden könnte. Ein Ding erwärmen heißt also, seiner innern Ausdehnung ein vorübergehendes Uebergewicht verschaffen; die Erkältung macht die Zusammenziehung überwiegend.

§. 133.

Was sind also die Dinge durch die Cohäsion? Einzelne. Was waren sie vorher? was waren z. B. die Schneeflocken, ehe sie in der Luft entstanden? — Luft waren sie. Also waren sie im Ganzen verloren und sonderten sich erst durch Cohäsion daraus ab, daß

also das Entstehen der Cohäsion etwas Aehnliches wäre, wie das Entstehen der Zahlen in der Eins, ein Brechen, und wenn du ein Glas in Stücken schlägst, so sind die Scherben der Idee und der sinnlichen Erscheinung nach Brüche, d. h. einzelne Cohäsionen entstanden auf Kosten der vorherigen allgemeinen Cohäsion. Darum halten auch die Scherben nicht mehr zusammen, wenn du sie einander noch so nahe bringst, denn jede Scherbe ist jetzt in sich selbst abgeschlossen, und greift nicht mehr in die andere ein. So theilt sich die Luft in unendlich viele Schneeflocken, sechs kleine Spießchen, die sternartig mit einander verbunden sind.

§. 134.

Diese Spießchen der Schneeflocken aber zeigen dir eine interessante Cohäsionserscheinung. Einmal sind sie untereinander zu einem sternförmigen Ganzen verbunden, müssen also im Augenblicke der Entstehung (Krystallisation) sich nicht so strenge gegen einander abgeschlossen, vielmehr noch eine Tendenz zur gemeinschaftlichen Cohäsion beibehalten haben; und zweitens sind diese Spießchen an einem Ende breit, am andern zugespitzt, wie auch ein Ei dergleichen verschiedene Pole zeigt. Wo sie nun breiter sind, da sind sie es offenbar durch eine bei

ihrem Entstehen hier freier wirkende innere Ausdehnung, und wo sie spitzig sind, wurde die Ausdehnung durch die zum Punkte führende Zusammenziehung allmählich eingeschränkt. Auf diese Weise siehst du ein Ding in sich selber ungleich, und wenn du erwägst, daß alle kleinen Dinge nur Brüche von großen sind, z. B. die Erdprodukte von der Erde; so wirst du begreifen, wie auch die Dinge unter sich ungleich seyn müssen, je nachdem sie von einem verschiedenen (nördlichen oder südlichen) Pole) ihres größeren Ganzen genommen sind. Nun sage ich, daß die ungleichen Dinge eben wegen ihrer Ungleichheit einander ergänzen können, indem gerade das eine hat, was dem andern fehlt, und da nun alle Dinge gerade so auf einander wirken, wie sie sind, z. B. das Warme wärmt, das Saure säuert u. s. w., so müssen sie nothwendig mit diesem Ergänzungsbedürfnisse auf einander wirken. Daraus folgt eine Bewegung zweier Dinge gegen einander, um sich in Einer gemeinschaftlichen Cohäsion zu ergänzen — Anziehung und eine Abneigung zweier Dinge, die kein solches Bedürfniß für einander haben, welche in Bewegung ausschlagend Abstossung heißt. Magnetische und elektrische Experimente können dir beides anschaulich machen.

§ 135.

§. 135.

Ich verstehe aber durchaus nicht, wie ein Ding noch über den Umfang seines eigenen Wesens hinaus ein anderes bewegen, anziehen oder abstossen kann, und wenn ich die Ausdehnung und die Zusammenziehung in einerlei Ding sehr klar finde, so begreife ich eine solche Wirkung in die Ferne nicht, wie sie bei den Anziehungen und Abstossungen ist.

Wirke ich nicht, indem ich spreche, auch aus der Ferne auf dich? wirkt nicht auch die Glocke, welche du schlagen hörst, aus der Ferne auf dich? Was ist nun dieß? nicht wahr, der Klang meiner Stimme und der Glocke kommt durch die mitklingende Luft in dein Ohr? So ist es mit aller Wirkung in die Ferne. Jedes Ding wirkt nur auf das ihm unmittelbar nächste, und so setzt sich die Wirkung durch eine Kette von Dingen bis zu einem entfernten Dinge fort. Die Luft pflanzte den ihr mitgetheilten Klang der Glocke bis zu deinem Ohre fort, und solche mitgetheilte Bewegungen lassen sich überhaupt sehr weit fortpflanzen.

§. 136.

Jetzt kennest du also zweierlei Bewegung, die in einem Dinge bleibende, die blos sein Volum verändert,

und

und die über das Ding hinausgehende, durch Mittheilung sich fortpflanzende, Wirkung in die Ferne. Die innere Bewegung giebt Ausdehnung und Zusammenziehung, die äussere aber giebt Anziehung und Abstossung. Jede Anziehung aber ist ein Streben eines Dings, das andere mit sich zu vereinigen, also dem Sinne nach eine wahre Zusammenziehung zweier Dinge in Eins, und jede Abstossung ist eine Ausdehnung, bei welcher die Dinge zwar nicht ihr Volum, wohl aber ihren Wirkungskreis ausdehnen, indem sie einander gegenseitig aus ihrem Wirkungskreise entfernen. Nun merke, daß diese Wirkungskreise weit über den leiblichen Umfang des Dinges selbst hinausgehen, wie z. B. der weit entfernte Mond noch auf die Erde wirkt, und dann, daß alle Dinge, welche aufeinander wirken, nicht einseitig wirken, sondern gegenseitig, wenn auch die Wirkung des einen mit der des andern verglichen ganz gering seyn sollte. So wirkt die Sonne mit ungeheurer Uebermacht auf die Erde, aber diese, so schwach sie auch gegen die Sonne seyn mag, wirkt dennoch auf die Sonne zurück. Alles Leben und Wirken ist gegenseitig.

§. 137.

§. 137.

Durch Anziehungen und Abstossungen verändern die Dinge ihre Stelle im Raume, und kommen dadurch in äussere Verhältnisse zu einander, z. B. der Magnet macht die Feilspäne über sich und links und rechts bewegen. Diese Raumveränderungen der Dinge sind auch eine Bewegung, die ihre eigene Art und Weise hat, und die Dinge fallen, drücken, stossen dabei verschiedentlich auf einander. Vollends wenn du solchen Bewegungen durch deine Glieder die Entstehung giebst, z. B. wenn du einen Stein gegen die Wand wirfst, so werden sie erst recht sichtbar. Der Stein prallt von der Mauer ab, gegen die er stieß, dann fällt er, dann drückt er die Erde, auf welcher er zu liegen kommt u. s. w.

§. 138.

Du wirst finden, daß wenn solche Bewegungen entstehen sollen, erst die Schwere überwunden werden müsse, durch welche die Dinge drücken und fallen, und diese Bewegungen beziehen sich überhaupt alle auf die Schwere, die hier zum Theil aufgehoben, zum Theil auch wieder hergestellt wird. Was ist denn aber diese Schwere?

Was

Was meinst du, wenn der Stein, der hier eine Grube in die Erde gedrückt hat, immer weiter und weiter drücken könnte, wie weit würde er drücken? — Bis durch die Erde hindurch. — Meinst du dann nicht, daß auf der entgegengesetzten Seite der Erde auch Steine liegen, welche drücken? Diese müßten demnach, wenn sie weiter und immer weiter drücken könnten, bis zu uns herauf drücken, und endlich in der That gen Himmel fahren. Da, wie du siehst, der Stein bei uns und bei unsern Gegenfüßlern von der Oberfläche der Erde nach dem Innern derselben drückt, so ist wohl die Schwere sichtbar ein Zug nach Inne, und muß im Innern der Erde, also im Mittelpunkte derselben, aufhören. Nun ist, wie du ebenfalls weißst, der Mittelpunkt eines Dings seine unentfaltete Einheit, die Schwere also ist ein Gezogenwerden der Bruchstücke der Erde zu ihrer gemeinschaftlichen Einheit, welche ihr Ursprung ist, und die Richtungen der Schwere oder die Linien des Falles sind Strahlen, welche vom Umkreise nach dem Mittelpunkte gehen, also Strahlen der Zusammenziehung. Hat nun nicht diese Zusammenziehung in einem einzelnen Dinge, die Ursache seiner Einzelnheit, Cohäsion geheissen, und kann die Schwere etwas anderes seyn, als ein Cohäsionsstreben der Erde und ihrer Bruchstücke?

§. 139.

§. 139.

Also das Fallen wäre der Ausdruck dieses Strebens der Bruchstücke der Erde mit ihrer mütterlichen Einheit zusammenzuhängen. Wenn sie dies erreicht haben, so fallen sie natürlich nicht mehr. Aber warum fallen die Bruchstücke eines einzelnen Dinges, z. B. eines Glases, nicht auch auf einander, sondern alle nach der Erde zu? — Warum siehst du beim Sonnenscheine keine Sterne glänzen? — Weil das Große das Kleine unmerklich macht. Also wäre doch auch eine Schwere zwischen den Bruchstücken jedes einzelnen Dinges? — Ohne Zweifel. Diese Schwere einzelner Dinge oder Bruchstücke gegen einander wird aber erst recht sichtbar, wenn sie recht große und glatte Oberflächen haben. Du kannst diese Adhäsion, wie man sie nennt, wahrnehmen, wenn du zwei Stücke Metall zu Scheiben hämmerst und dann polirst. Die auf einander gelegten glatten Flächen werden dir deutlich zeigen, daß sie Eins seyn wollen, indem sie mit ziemlicher Stärke an einander hängen. Die Erde, als die große Mutter, übt aber eine viel größere Gewalt des Zusammenfassens über ihre Kinder aus, als diese unter einander selbst ausüben können. Ihr Streben gegen einander ist so schwach, daß es gegen den gewaltigen Zug aller Dinge nach dem Mittelpunkte der Erde fast verschwindet.

§. 140.

Wenn ich die Schwere richtig gefaßt habe, so müßte sie an der Nähe des Mittelpunktes der Erde am stärksten wirken, und es müßte eine Entfernung von diesem Mittelpunkte geben, wo ein Ding der Schwere entgehen könnte, weil sie dort zu schwach wäre, es zu überwältigen?

Gewiß, du denkst sehr klar. Wenn nun ein Ding in solche Ferne käme, so würde es entweder für sich stille schwebend bleiben, oder, wenn es Veranlassung fände, mit andern Dingen in einzelne Anziehungen und Abstossungen eingehen. Veranlassung dazu würde es aber in der Nachbarschaft anderer Dinge genug finden, denn diese würden ihm entweder entgegengesetzt, oder gleich seyn. So würde es also von einem Dinge zum andern hin und her gezerrt werden, und wenn es dabei einem übermächtigen Dinge begegnete, oder auch dem Einflusse der mütterlichen Schwere noch nicht ganz entgangen wäre, so würde es bei den einzelnen Richtungen nach jenen einzelnen Dingen, auch noch dem Zuge zu jenem übermächtigen oder mütterlichen Dinge folgen, und also gerade das thun, was Erde, Venus, Merkur und die übrigen

Plane-

Planeten in Ansehung der Sonne thut, oder der Mond in Ansehung der Erde, nämlich umlaufen. Dieser Umlauf ist also eine zusammengesetzte Bewegung, wobei einzelne Richtungen nach der Seite mit einer Richtung nach dem Mittelpunkte vereinigt werden.

§. 141.

Den Umlauf der Planeten um die Sonne verstehst du also nun daraus, daß die Planeten in gehöriger Entfernung von der Sonne gesetzt bereits soviel Selbstständigkeit haben, den eigenen Anziehungs- und Abstossungs-Verhältnissen folgen zu können, dabei aber doch noch nicht Selbstständigkeit genug, um das Uebergewicht der Sonne gänzlich abzuläugnen. Durch ihre Selbstständigkeit bewegen sich die Planeten zur Seite der Sonne, und durch das Uebergewicht der letztern wird diese Seitenbewegung nach dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte zu gekrümmt. Wenn nun in dieser krummen Bahn die Selbstständigkeit des Planeten mit der Herrschaft der Sonne kämpft, so wird die krumme Bahn nicht völlig breitrund, sondern länglicht, so daß in der einen Hälfte der länglicht runden Bahn (Perihelium) der Planet der Sonne näher ihr mehr gehorcht, in der andern Hälfte (Aphelium) aber der Planet mehr sich selbst überlassen von der

Sonne

Sonne abschweift. — Wie kommen aber die Planeten in eine solche Entfernung von der Sonne, daß sie nicht mehr wie geworfene Steine auf sie herabfallen? Sind sie von der Sonne ausgeworfen, oder schon entfernt von ihr entstanden? — In zweifacher Art konnten die Planeten im weiten Aether entstehen, entweder daß sie Bruchstücke ihrer Sonne durch heftige Geburtsbewegungen von derselben losgerissen wurden, oder daß sie mit ihr zugleich entstanden, diese erst als ihren König anerkannten, nachdem sie ihre übermächtige Kraft gefühlt hatten. Welches von beiden nun bei unserer Sonne und ihren Planeten der Fall gewesen sey, weiß ich nicht.

§. 142.

Was glaubst du, daß seyn würde, wenn überall in der Natur die Schwere das Uebergewicht hätte? — Allgemeine Ruhe müßte seyn, denn die Schwere würde alles in unzertrennter Einheit beisammen halten. — Richtig. Indem es nun aber wirklich nicht so ist, so kannst du schliessen, daß in dem allgemeinen Leben der Dinge etwas seyn muß, das der Schwere entgegengesetzt, ihre Wirkungen beständig aufhebt, und dadurch die Schwere nöthigt, um die Herrschaft zu kämpfen. Was meinst du,

wer

wer ist der Feind der Schwere in der Natur? — Wir sagten vorhin, daß die Richtung der Schwere ein Strahl im Kreise wäre, der von dem Umfange nach dem Mittelpunkte gienge. So muß also der Feind der Schwere ein Strahl seyn, der von dem Mittelpunkte nach dem Umkreise geht. Kennst du diesen Strahl nicht? den Lichtstrahl? — Das Licht ist leicht, und alles Leichte ist wenig schwer, und was am leichtesten ist, wie die Luft, ist durchsichtig und am Rande der Erde, also dem Lichte verwandt, und in der größten Entfernung von der Erde Mittelpunkte. Das Licht ist das Streben der Natur sich auszubreiten, und die Schwere ist es, die diesem Streben beständige Gränzen setzt, indem sie alles auseinander getriebene wieder zu vereinigen arbeitet. Hier hast du also die doppelte Bedeutung des Strahls im Kreise. Welche ist wohl die erste? — Nothwendig muß das Licht dem vorangehen, was ihm Gränzen setzt. — Ich sage aber: nothwendig muß das, was dem Lichte Gränzen setzen konnte, mit ihm zugleich da gewesen seyn. Die Schwere fieng an zu wirken, als das Licht hervorbrach.

§. 143.

Nun kennst du die Bewegungen der Schwere. Zeige mir jetzt auch den Gegensatz in ihnen. — Es ist wohl kein anderer, als eben die zwei Richtungen des Strahls im Kreise. — Richtig! Also: hinaus, herein. Und wenn du nun auf der Oberfläche einer Sphäre stehst, z. B. auf der Erdoberfläche, so heißt dies: herauf, herab. Dies verstehst du jetzt, und ich darf verlangen, daß du mir den ganzen Gegensatz an einer Linie anschaulich machen sollst, die kein Strahl im Kreise, sondern nur überhaupt eine gerade Linie ist. Theile diese Linie in Hälften von entgegengesetzter Bewegung, wie einen Balken, auf dem Knaben schaukeln, so ist die eine Hälfte dieser starren Linie steigend, die andere fallend, und in der Mitte ist ein Punkt, der aufliegt, also ruht, und je weiter sich der Hebel über diesen Punkt hinaus erstreckt, desto stärker ist das Steigen und das Fallen.

§. 144.

Vorhin hieß der Hebel eine starre Linie. Ich will dich noch eine andere starre Linie kennen lehren. Spanne eine Saite auf, so ist sie durch Spannung starr, also von aussen zur Starrheit gezwungen, dagegen ein Balken oder eine Eisenstange durch innere

Haltung starr sind. Zupfe nun die Saite oder streiche sie mit dem Geigenbogen, so giebt sie einen Ton von sich, und wenn du genau zusiehst, wirst du bemerken, daß sie während dieses Tones sich beständig abwechselnd auf und nieder schwingt, also steigt und fällt, wie die zwei Arme eines Hebels. Der Gegensatz von Steigen und Fallen erscheint also an dieser künstlich starren Linie nach einander, indeß er in dem Hebel neben einander steht. Dort also ist er zeitlich, hier räumlich.

§. 145.

Nimm nun einen Stab und mache diesen in seinem Ruhepunkte, den er als Hebel hat, an einem Stifte fest, so daß er um diesen Stift beweglich ist; jetzt kannst du mit seinen Armen alle möglichen Richtungen beschreiben, welche der Strahl im Kreise haben kann. Befestige diesen Stab an seinem einen Endpunkte am Stifte, so wird er mit seinem freien Ende schwankend Bogenlinien beschreiben und Pendul heissen. In beiden Fällen war der Befestigungspunkt ein Punkt der Ruhe, und entfernt von diesem Punkte war Bewegung; der Gegensatz von Ruhe und Bewegung war also hier ganz räumlich anschaulich gemacht. Gieb mir nun eine starre Fläche, welche rund um einen festen Mittel-

punkt

punkt beweglich den Gegensatz von Ruhe und Bewegung an sich darstelle, so wird dies entweder eine undurchbrochene Scheibe seyn, oder wenn zwischen dem Rande und dem Mittelpunkte bestimmte starre Strahlen gesetzt wären, so würde es ein Rad heissen, und der starre Mittelpunkt Achse. Wie unterscheidet sich nun dieses Rad von jener Scheibe, die auch um ihre Achse beweglich ist? Sind nicht die Strahlen, die in dem Rade wirklich zu starren Linien ausgebildet sind, in der Scheibe alle vorhanden, nur nicht ausgebildet? denn in der Scheibe geht von ihrem Mittelpunkte nach ihrem Rande in jeder Richtung eine starre Linie. Nun ist jede starre Linie ein Hebel, und die Scheibe also ein Ganzes von unbestimmt vielen um einen Mittelpunkt gelegten Hebeln, die entgegengesetzt wie Halb- und Durchmesser sich ergänzen? Ist also nicht im Rade, das eine bestimmte Anzahl solcher Hebel zeigt, der Kreis mit seinem Kreutze sichtbar und greifbar geworden? Wie viel Speichen müßte demnach ein Rad haben? Viere oder sechse. Viere wegen der vier Arme des Kreutzes im Kreise, sechse aber wegen des Verhältnisses des Strahls zum Kreise und wegen der vollständigern Vermittlung der Gegensätze untereinander.

§. 146.

Was waren die Worte des Raumes in unserer Dinglehre? Oben, unten, rechts, links, vorne, hinten. Was nun nach allen diesen Richtungen im Raume dasteht, heißt ein Körper, und wenn er nach allen diesen Richtungen auch rund ist, eine Kugel. Denke dir nun eine Kugel beweglich um eine starre Linie (Spindel), die durch ihr Inneres gienge, so heisse diese ihre Achse, und die Drehung heisse Rotation. Wie bringst du aber eine Rotation zu Stande? nicht wahr, wenn du schief auf die Oberfläche der Kugel stößst? denn der gerade Stoß würde die Kugel nur gegen ihren Mittelpunkt zurückdrängen, nicht bewegen. Es muß also in der Oberfläche der Kugel eine Seitenbewegung entstehen, wenn Drehung erfolgen soll. Nun aber denke dir die Spindel, um welche die Kugel sich drehen soll, als mit der Kugel selbst Eins und verwachsen, so wie der Punkt, um welchen zwei Hebelarme steigen und fallen, im Hebel selbst ein Ruhepunkt ist, so hast du Kugeln, die sich um ihre eigene Achse drehen, wie die Sphären des Himmels und unsere Erde. Die Ursache ihrer Achsendrehung liegt entweder in dem unruhigen Bildungsprozesse ihrer Massen, der das Gleichgewicht ihrer Oberflächen stört, oder in äussern Einflüssen, welche nach der Seite ziehen. Auf jeden Fall ist diese Achsendrehung wie der Umlauf eine

aus

aus einer Seitenwirkung und Wirkung des Mittelpunktes zusammengesetzte Bewegung.

§. 147.

Denke dir jetzt eine Kugel, deren Inneres selbst im Stande wäre, in ihrem Aeussern solche Ungleichheiten aufzuregen, aus welchen eine Bewegung um die Achse folgen müßte, deren Inneres zugleich auch diesen Bewegungen Maaß und Richtung geben könnte. Was wäre diese Kugel? Lebendig. Bei dieser lebendigen Kugel würde also die äussere sichtbare Bewegung von einer innern Thätigkeit in Achse oder Mittelpunkt abhängen, und diese Kugel würde Bewegendes und Bewegtes zugleich seyn, anstatt daß für eine gestossene Billardkugel du das Bewegende bist, sie nur das Bewegte. Käme hier nicht ein Verhältniß zum Vorschein, wie das der Potenzen in den Zahlen war? Sie waren Selbstmultiplikationen, weil Inhaltszahl und Formzahl in ihnen dieselbe Zahl waren. So ist das Lebendige ein Selbstbewegendes, und wenn es in Ruhe ist, ein Selbstständiges; denn es giebt sich Ruhe und Bewegung selbst, ist Bewegendes und Bewegtes, Stellendes und Stehendes zugleich.

§. 148.

Das Ding also ist lebendig, in welchem Bewegendes und Bewegtes Eins sind. Ist es aber nicht auch mit einer in Schwung gesetzten Glocke so, die ihren Schwengel lange nach der gegebenen Bewegung nicht ruhen läßt, und zugleich den Ton noch lange nachbrummt? — Sie setzt nur eine mitgetheilte Bewegung noch eine Zeit lang fort, indeß das Lebendige seine Bewegungen auch selbst anfängt. Nun sieh aber, auf welche Art das Lebendige Ursache seiner eigenen Bewegungen wird. Es theilt sich selber innerlich, und zeigt eine zweifache Gestaltung, wovon die eine, Muskel und Knochen, ganz zu äusserer Bewegung der Glieder bestimmt ist, die andere aber, Nervensystem genannt, eine innere Strahlung bildet, welche alles Aeussere durchdringt. Das Lebendige ist also innerlich keineswegs einartig wie ein Stück Blei oder Diamant, sondern vielartig, und dieses Vielartige läuft auf den Gegensatz eines Bewegenden und Bewegten hinaus, welcher Gegensatz aber natürlich wieder seine Einheit hat, von welcher er ausgeht, und seine Vereinigung, in welcher er endet. Die Bewegung, die durch solchen innern Gegensatz des Lebendigen möglich wird, heißt organische Bewegung, z. B. die Bewegung deiner Hand, deiner Zunge, deiner Augenlieder ꝛc., und du wirst einsehen, daß durch

den

den Gebrauch deiner Glieder erst die Bewegungsformen: Wurf, Stoß, Schlag, Sprung ꝛc. in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit möglich werden.

§. 149.

Diese organische Bewegung ist denn an Mannigfaltigkeit die reichste, wie du dich durch den Anblick eines Seiltänzers oder Balletttänzers überzeugen kannst. Welche vielfache Bewegungen kannst du auch nur allein mit den Muskeln des Gesichts, des Kehlkopfes, der gesammten Redeorgane u. s. w. zu Stande bringen? Wie einförmig ist dagegen der Fall des Steins und der Lauf der Planeten um die Sonne! Auch wiederholen sich in dieser organischen Bewegung, als der höchsten, die Formen aller übrigen Bewegungsarten. So wird die Ausdehnung zur Ausbreitung deiner Arme, die Zusammenziehung zur Faltung derselben, und beides zeigt sich auch an deiner Hand, wo die Ausdehnung als Langen nach etwas, die Zusammenziehung als Greifen nach etwas erscheint; Anziehung hast du darin, wenn du dich eines Dinges bemächtigst, Abstossung, wenn du es fortwirfst, wegstössest oder vermeidest; das Steigen hast du in jedem Emporheben, das Fallen in jedem Niederlassen deines Körpers, und die Bewegung um die Achse und um

einen

einen entfernt liegenden Mittelpunkt zeigt dir jeder Walzer, wo das tanzende Paar sich um eine gemeinschaftliche Achse und alle Paare zugleich sich um die Mitte des Tanzsaals bewegen, welche Mitte dann billig durch irgend ein Bildhauerkunstwerk dargestellt werden sollte.

§. 150.

Ueberblickst du jetzt alles, was wir von der Bewegung erkannt haben, so wirst du vier Arten von Bewegung verstehen, wie nämlich erstens die Elemente oder Kräfte im Innern eines Dings sich ausdehnend oder zusammenziehend bewegen; zweitens wie diese Wirkung der Elemente nach aussen mitgettheilt Anziehungen und Abstossungen giebt; drittens wie diese unter der Herrschaft der Schwere ein Steigen und Fallen bewirken; und viertens wie in einem lebendigen thierischen Organismus alle diese Bewegungen mit vielfacher Veränderung sich wiederholen, so daß z. B. der einfache Klang eines Metalls hier zur vielfach veränderlichen Stimme wird, und die organische Bewegung das Eigenthümliche hat, daß Theile, z. B. Finger, Hände ꝛc., in Bewegung seyn können, indeß doch das Ganze des Leibes in Ruhe bleibt, wie auch, daß das Leben selbst innerlich nur durch Bewegung, z. B. Blutumlauf, Herzschlag, Athemholen ꝛc.

be-

besteht, wobei ebenfalls das Ganze äusserlich wieder in Ruhe bleiben kann.

Willst du diese vier Arten der Bewegung der Kürze wegen mit den eingeführten wissenschaftlichen Namen bezeichnen, so kannst du dir zugleich ihr Verhältniß zu einander vorstellen, wenn du sie nach unserer Weise an die Tafel schreibst. Nämlich:

organisch

mechanisch dynamisch

elementarisch

wo die einfache Bewegung der Elemente unten, die lebendige Bewegung oben steht, und dynamische Wirkung der Kräfte nach aussen mit mechanischer Bewegung der Massen den Uebergang machen.

Vorzüglichste Druckfehler

in Buchwald's Elementarlehre, die man vor Lesung des Buchs zu verbessern bittet.

Seite	Zeile	statt	lies
16.	10 von unten	einer	meiner
21.	11 von oben	einer	eine
30.	5 von oben	wan	man
38.	7 — —	der	das
43.	4 — —	im	in
46.	9 von unten	erste	letzte
52.	3 — —	aber	war
57.	6 — —	hinzudenkst	hinwegdenkst
66.	4 von oben	$\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db}$	$\frac{ad}{bd} : \frac{cb}{db}$
68.	7 von unten	Berechnung	Brechung
81.	9 — —	genauesten	grauesten
86.	6 von oben	Boden	Bogen
104.	9 — —	einfacher	vielfacher
113.	13 — —	überliegenden	gegenüberliegenden
116.	6 von unten	muß das Wort: ist wegfallen	
156.	5 — —	breitrund	kreisrund.

In der Verlagshandlung dieses Buches sind auch noch folgende zu haben:

Briefwechsel, allgemeiner physiokratischer, einer Gesellschaft deutscher Gelehrten, herausgegeben von Joh. Carl Fr. Hauff, mit 2 Kupfertafeln. gr. 8. 1810. 1 fl 15 kr. 20 Sgr

Buchwald, Dr. Friedr., Elementarlehre der Zeit- und Raum-Größen. gr. 8. 1818. 1 fl. 15 kr. 20 Sgr

Hornberger, Joh. Ph., Grundsätze der Kameralrechnungsführung, mit 13 Bogen Tabellen. gr. 8. 1796. 1 fl 45 kr. 1 Rhlr. 4 Sgr

Langsdorf, Karl Chr., Anfangsgründe der reinen Elementar- und höhern Mathematik, auf Revision der bisherigen Prinzipien gegründet, mit 9 Kupfertafeln. gr. 8. 1802. 3 fl 45 kr. 2 Rthlr 12 Sgr

— — über die Unstatthaftigkeit des Prinzips der unendlichen Theilbarkeit, zur Belehrung aller derer, welche die Geometrie studiren oder darin Unterricht ertheilen wollen. Ein Anhang zu vorstehendem Buch. gr. 8. 1804. 15 kr. 4 Sgr

— — Grundlehren der mechanischen Wissenschaften, welche die Statik und Mechanik, die Hydrostatik, Hydraulik und die Maschinenlehre enthalten. Mit besonde-

sonderer Rücksicht auf Physiker und Praktiker, mit 12 Kupfertafeln. gr. 8. 1802. 5 fl 30 kr 3 Rthlr 16 Sgr

Langsdorf, Karl Chr., Theorie des Krummzapfens, eine der wichtigsten für die praktische Maschinenlehre. Ein bisher noch nicht aufgelöstes Problem, in aller Schärfe erwiesen und in einer einfachen Formel dargestellt. Ein Anhang zum vorstehenden Buch. gr. 8. 1803. 15 kr. 4 Sgr

— — Grundlehren der Photometrie oder optischen Wissenschaften, 2 Abtheil. mit 12 Kupfert. gr. 8. 1803. u. 1805. (Jeder Theil 4 fl 30 kr. 3 Rthlr.) 9 fl. 6 Rthlr

(Die 2te Abtheilung enthält die vollständige Theorie der mannichfaltigen Fernröhren, mit ausführlichen Anwendungen und berechneten Tafeln, besonders zum Gebrauche des ausübenden Optikers.)

— — und Joh. Mich. Wassermann, der Strumpfwirkerstuhl und sein Gebrauch, nebst den damit verbundenen Maschinen deutlich beschrieben und durch genaue Abbildungen aller einzelnen Theile umständlich erläutert, für Manufakturisten und Freunde der Technologie, mit 14 Kupfertafeln. gr. 4. 1805. 3 fl 2 Rthlr

Zugleich mit dem Titel: Schauplatz der Künste und Handwerke, 21ster Band.

Mayer, Joh. Tob., gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, 4ter Theil, 3te verm.

verm. und verbess. Auflage mit 8 Kupfert. 8. 1815.
3 fl 45 kr 2 Rthlr 12 Ggr

Auch mit dem Titel: Vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land- See- und Himmelscharten, und der Netze zu Coniglobien und Kugeln.

Mayer, Joh. Tob., über die Gesetze und Modifikationen des Wärmestoffes. 8. 1791. 1 fl 16 Ggr

— — de observationibus stellarum fixarum computandis, cum tab. aen. 4. 1787.
15 kr 4 Ggr

Neubig, Andr., Anfangsgründe der reinen Geometrie und ebenen Trigonometrie, nach philosophisch-euklidischen Ansichten abgefaßt und mit einem doppelten Anhange von der Buchstabenrechnung und den Logarithmen versehen, mit 6 Kupf. gr. 8. 1812. 1 fl 16 Ggr

Rebmann, Joh. Chr., von dem gerichtlichen und aussergerichtlichen Verfahren in Rechnungsangelegenheiten. 4. 1789. 1 fl 45 kr 1 Rthlr 4 Ggr

— — von Einrichtung und Führung des Cameralrechnungswesens und richtiger Aufstellung der Rechnungen, oder 2ter Theil des vorstehenden Buchs. 4. 1790. 4 fl 2 Rthlr 16 Ggr

Rößling, Chr. Lebr., Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Funktionen, nebst den Principien der Anwendung derselben auf die Auflösung mathematischer Probleme. Mit beson-

sonderer Rücksicht auf diejenigen, welche sich blos durch Selbststudium Kenntnisse in der Mathematik verschaffen wollen, und mit Vermeidung aller Begriffe von dem unendlich Kleinen bearbeitet. gr. 4. 1805. 6fl 4Rthlr

Wagner, Joh. Jak., mathematische Philosophie. gr. 8. 1811. 2fl 30kr 1Rthlr 16Sgr

— — der Staat. gr. 8. 1815. 3fl 1Rthlr 16Sgr

Weinich, Geo. Phil., kurze doch vollständige Anweisung zum Rechnen nach Reesischer Manier in 140 Beispielen. gr. 8. 1814. 24kr. 6Sgr

— — das Vorzüglichste aus der Geometrie und Trigonometrie populär vorgetragen und so geordnet, daß Güterbesitzer und Professionisten ꝛc., für welche diese Anweisung vorzüglich bestimmt ist, für jeden ihnen vorkommenden Fall hier sogleich einen ähnlichen zu ihrer Selbstbelehrung auffinden können; aber auch als Leitfaden in niedern Schulen zu gebrauchen ꝛc. mit 3 Kupf. gr. 8. 1814. 24kr 6Sgr

— — kurze und leichtfaßliche Anweisung zur Buchstaben-Rechnung und niedern Algebra. gr. 8. 1815. 24kr 6Sgr

(Alle 3 Trakt. machen einen ganzen Cursus aus.)

— — das Wissenswürdigste aus der Lehre vom Weltgebäude, oder die Kunst den Kalender recht zu verstehen und vernünftig zu gebrauchen, auch sich für jedes vergangene oder künftige Jahr einen Kalender selbst zu verfertigen, nebst einem Muster zu einem immerwährenden Kalender. gr. 8. 1818. 15kr 4Sgr

Weltrich, J. A. P., über Taxation der Grundstücke, mit 17 Tabellen. gr. 4. 1813. 1fl 45kr 1Rthlr 4Sgr

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Buchwald, Friedrich

Elementarlehre der Zeit- und Raumgrößen

Erlangen 1818

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 104
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267391-1